

Formelsammlung Schaltungstechnik

Part I

Grundaxiome

Konzentriertheithypothese: Die Ausdehnung der Schaltung d ist viel kleiner als die Wellenlänge λ .

$$d \ll \lambda = cT = \frac{c}{f}$$

Kirchoff's Current Law (KCL):

$$\text{Summenform: } \sum_{\text{Knoten}} i_j(t) = 0 \quad \text{Matrixform: } A \cdot i = 0 \text{ mit } a_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{Zweig } \alpha \text{ geht von } \beta \text{ aus.} \\ -1 & \text{Zweig } \alpha \text{ führt zu } \beta. \\ 0 & \text{Zweig } \alpha \text{ berührt } \beta \text{ nicht.} \end{cases}$$

Kirchoff's Voltage Law (KVL):

$$\text{Summenform: } \sum_{\text{Umlauf}} u_j(t) = 0 \quad \text{Matrixform: } u - A \cdot u_k = 0 \text{ mit } u \text{ den}$$

Spannungsdifferenzen,

u_k Potential am Knoten k , $a_{\alpha\beta}$ wie oben.

Die Kirchoffgesetze sind linear.

Part II

Eintore

1 Beschreibungsformen

Enthaltene Größen:

$$u = \frac{d\phi}{dt}, i = \frac{dq}{dt}, q = \int_{-\infty}^t i(t)dt, \phi = \int_{-\infty}^t u(t)dt$$

Implizite Darstellung: $\mathfrak{F} = \{(u, i) | f_{\mathfrak{F}}(u, i) = 0\}$

Explizite Darstellung: $i = g_{\mathfrak{F}}(u)$ oder $u = r_{\mathfrak{F}}(i)$

Parameterdarstellung: $F = \{(u_{\mathfrak{F}}(\lambda), i_{\mathfrak{F}}(\lambda)) | \lambda \in \mathbb{R}\}$

Zugehörige Ebenen:

$$0 \quad \text{Resistive Bauelemente: } f_R(u, i) = 0 \quad \text{Kapazitive Bauelemente: } f_C(u, q) =$$

$$0 \quad \text{Induktive Bauelemente: } f_L(\phi, i) = 0 \quad \text{Memrestive Bauelemente: } f_M(u, i) =$$

0

Diese Formelsammlung wurde von Jan Peters (www.jan-peters.net) erstellt und hat vielen Studenten durch ihr Vordiplom geholfen. Den Autoren wuerde ein Link zu seiner Downloadseite.....
<http://www.jan-peters.net/Miscellaneous/LectureNotes>
sehr freuen!

2 Eigenschaften

2.1 Resitive Eintore

Spannungsgesteuert: $g_{\mathfrak{F}}(u)$ existiert.
existiert.

Stromgesteuert: $r_{\mathfrak{F}}(i)$

Ungepolt(Bilateral): $\forall(u, i) \in \mathfrak{F} : (-u, -i) \in \mathfrak{F}$

Aktiv: $\exists(u, i) \in \mathfrak{F} : u \cdot i < 0$

Passiv: $\forall(u, i) \in \mathfrak{F} : u \cdot i \geq 0$

Verlustfreiheit: $\forall(u, i) \in \mathfrak{F} : u \cdot i = 0$, das Gegenteil zu Verlustbehaftet.

Quellenfreiheit: $(0, 0) \in \mathfrak{F}$

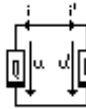
Dualität: \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^d heißen dual bezüglich R_d zueinander, wenn $\forall(u, i) :$
 $((u, i) \in \mathfrak{F} \iff (R_d \cdot i, \frac{u}{R_d}) \in \mathfrak{F}^d)$

Ist \mathfrak{F} spannungsgesteuert(strom-), so ist \mathfrak{F}^d stromgesteuert(Spannungs-).

Ist \mathfrak{F} ungepolt(passiv, aktiv, verlustfrei, verlustbehaftet, zeitvariant), so auch \mathfrak{F}^d .

Streng linear: $\forall k \in \mathbb{R} : (u, i) \in \mathfrak{F} : (ku, ki) \in \mathfrak{F} \quad \wedge \quad \forall(u_1, i_1), (u_2, i_2) \in \mathfrak{F} :$
 $(u_1 + u_2, i_1 + i_2) \in \mathfrak{F}$

Arbeitspunkt:



Externe Kennlinie: $Q^X := \{(u, i) | (u, -i) \in Q\}$, Arbeitspunkt:
 $AP = Q^X \cap L$

Kleinsignalübertragung: $b_{lin}(a) \approx b(a)$ in A und $b_{lin}(A) = b(A)$ mit

$$b_{lin}(a) = b(A) + \frac{db_{lin}}{dt} \cdot (a - A) = b(A) + g \cdot \Delta a(t)$$

2.2 Reaktive Eintore

Dualität: $f_C(u, q) \rightarrow f_C(i \cdot R_d, \frac{\phi}{R_d}) = f_L(i, \phi)$, $f_L(i, \phi) \rightarrow f_C(\frac{u}{R_d}, q \cdot R_d) = f_C(u, q)$

Für streng lineare reaktive Eintore: $u(t) = \frac{1}{C}q(t)$, $i(t) = \frac{1}{L}\phi(t)$

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau, \quad i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t \phi(\tau) d\tau, \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt}, \quad u(t) =$$

$$L \frac{di(t)}{dt}.$$

Spannungen(Ströme) sind stetig bei kapazitiven(induktiven), linearen und zeitinvarianten Eintoren.










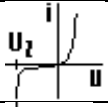

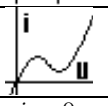


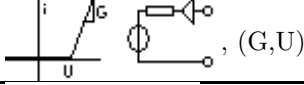

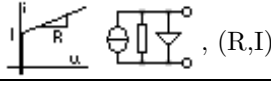




$$W_C = \int_{t_0}^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \int_{q(t_0)}^{q(t)} u(q) dq, \quad W_R = \int_{t_0}^t u(\tau) i(\tau) d\tau \quad \text{Energiespeicherung:}$$

$$E_C = \frac{C u_1^2}{2}, \quad E_L = \frac{L i_1^2}{2}$$

Ruhepunkt: q^* heißt Relaxationspunkt, wenn $\forall q : \int_{q^*}^q u(q) dq \geq 0$

Bei streng linearen Kennlinien ist der Ursprung stets ein Ruhepunkt.

3 Bauelemente

Bauteil	Kennlinie	Duales Element
Nullator 	$\mathfrak{F}_0 = \{(0, 0)\}$	Nullator
Widerstand 	$i = R \cdot u$	Leitwert $G^d = \frac{1}{R_d^2 G}$
Leitwert 	$u = G \cdot i$	Widerstand $R^d = \frac{R_d^2}{R}$
Leerlauf 	$G = 0, R = \infty$	Kurzschluß
Kurzschluß 	$G = \infty, R = 0$	Leerlauf
Schalter 	$S(t) = \begin{cases} 1 & \text{geschl.} \\ 0 & \text{offen} \end{cases}$	$S^d(t) = 1 - S(t)$
pn-Diode 	$i = I_S(e^{\frac{u}{U_T}} - 1), u = \frac{kT}{U} \ln(\frac{i}{I_S} + 1)$	
Photodiode 	$i(t) = I_S(e^{\frac{u}{U_T}} - 1) - i_L(t)$	
Zenerdiode 		
Tunnel diode 		
Ideale Diode 	$i = 0 \quad \text{falls } u < 0$ $u = 0 \quad \text{falls } i > 0$	
Konkaver Widerstand 		Konvex. Wid. $(GR_d^2, \frac{I}{R_d})$
Konvexer Widerstand 		Konkav. Wid. $(\frac{R}{R_d^2}, R_d I)$
Stromquelle 	$i = const.$	Spannungsquelle $u = R_d i$
Spannungsquelle 	$u = const.$	Stromquelle $i = \frac{R_d}{u}$
Reale Quellen		
Norator 	$\mathfrak{F}_\infty = \mathfrak{E}_{ui}$	
Lineare Kapazität	$u(t) = \frac{1}{C} q(t)$	Lin. Indukt.: $L = CR_d^2$
Lineare Induktivität	$i(t) = \frac{1}{L} \phi(t)$	Lin. Kap.: $C = \frac{L}{R_d^2}$

4 Parallel- und Serienschaltung von Eintoren

Bauteil	Paralleschaltung	Serienschaltung
Stromquelle	$i_{ges} = i_1 + i_2$	$i_{ges} = i_1 = i_2$
Spannungsquelle	$u_{ges} = u_1 = u_2$	$u_{ges} = u_1 + u_2$
Widerstand	$r_{ges} = r_1 r_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$	$r_{ges} = r_1 + r_2$
Leitwert	$g_{ges} = g_1 + g_2$	$g_{ges} = g_1 g_2 = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2}$
Lin. Kapazität	$c_{ges} = c_1 + c_2$	$c_{ges} = c_1 c_2 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$
Lin. Induktivität	$l_{ges} = l_1 l_2 = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$	$l_{ges} = l_1 + l_2$

Part III

Zweitore

5 Beschreibungsformen

Beschreibungsform	Allgemeine Beschreibung	Lineare Beschreibung
Leitwertsbeschreibung	$\underline{i} = \underline{g}(\underline{u})$	$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}$
Widerstandsbeschreibung	$\underline{u} = \underline{r}(\underline{i})$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$
Hybride Beschreibung	$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = h \left(\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = H \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$
Inverse hybride Beschr.	$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = h' \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$
Kettenbeschreibung	$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = a \left(\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$
Inverse Kettenbeschr.	$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = a' \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = A' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$

Linearisierung: $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} |_{AP} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}$, schöner $\underline{i} \approx \underline{I} +$

$$\frac{\partial \underline{g}(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \underline{\Delta u}$$

Umrechnungstabelle!

Kleinsignalbeschreibung: $\underline{\Delta f}(\underline{\Delta u}, \underline{\Delta i}) = M \cdot \underline{\Delta u} + N \cdot \underline{\Delta i}$ mit $M =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_1} & \frac{\partial f_1}{\partial i_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial i_1} & \frac{\partial f_2}{\partial i_2} \end{bmatrix}.$$

Quellenfreie lineare Zweitore:

Kernbeschreibung: $\mathfrak{F} = \text{Kern} [M \ N] := \left\{ \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \mid [M \ N] \cdot \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = 0 \right\}$, $\text{Rang} [M \ N] =$
2

Bildbeschreibung: $\mathfrak{F} = \text{Bild} [U] := \left\{ \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = [U] \cdot \underline{c} \wedge \underline{c} \in \mathbb{R} \right\}$, $\text{Rang} [U] =$
2

Nicht quellenfrei: $\mathfrak{F} = \text{Kern} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$, $\mathfrak{F} = \text{Bild} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$

6 Eigenschaften

Aktiv: $\exists \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \in \mathfrak{F} : \underline{u}^T \cdot \underline{i} \geq 0$, Passiv: $\forall \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \in \mathfrak{F} : \underline{u}^T \cdot \underline{i} < 0$

Verlustlosigkeit: $\forall \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \in \mathfrak{F} : \underline{u}^T \cdot \underline{i} = 0$ oder $\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = 0$

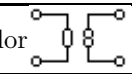
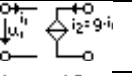
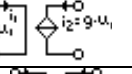
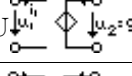
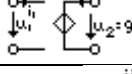
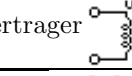
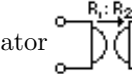
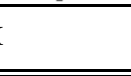
Dual: $\mathfrak{F}^d = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \mid f^d \left(\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \right) = f \left(\begin{bmatrix} R_d \cdot i \\ \frac{1}{R_d} \cdot u \end{bmatrix} \right) = 0 \right\}$, $G^d = \frac{1}{R_d^2} R$, $R^d = R_d^2$

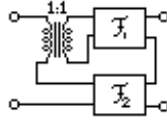
Umkehrbar: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^u = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \mid f^u \left(\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \right) = f \left(\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \right) = 0 \right\}$ mit $P =$
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}$

Antimetrisch: $\mathfrak{F}^u = \mathfrak{F}^d$

Reziprozität: $\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = 0$, $G = G^T$, $R = R^T$, $\det A = 1$,
 $\det A' = 1$

7 Spezielle Bauelemente

Bauelement	Zweitormatrizen	M
Nullor 	$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
USI 	$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{g} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}$	
ISI 	$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g} \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}$	
USU 	$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}$	
ISU 	$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{g} & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}$	
Übertrager 	$H = \begin{bmatrix} 0 & \ddot{u} \\ \ddot{u} & 0 \end{bmatrix}$, $H' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \\ \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \\ 0 & \ddot{u} \end{bmatrix}$	
Gyrator 	$G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ -\frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 0 & R_2 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix}$	
NIK 	$H = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$, $H' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	



8 Verschaltungen

Verschaltungen	Bild	Matrix
Parallschaltung		$G_{\mathfrak{G}} = G_{\mathfrak{F}_1} + G_{\mathfrak{F}_2}$
Serienschaltung		$R_{\mathfrak{G}} = R_{\mathfrak{F}_1} + R_{\mathfrak{F}_2}$
Serien-Parallel-Schaltung (Hybrid)		$H_{\mathfrak{G}} = H_{\mathfrak{F}_1} + H_{\mathfrak{F}_2}$
Parallel-Serien-Schaltung (Hybrid)		$H'_{\mathfrak{G}} = H'_{\mathfrak{F}_1} + H'_{\mathfrak{F}_2}$
Kettenschaltung		$A_{\mathfrak{G}} = A_{\mathfrak{F}_1} \cdot A_{\mathfrak{F}_2}, A'_{\mathfrak{G}} = A'_{\mathfrak{F}_1} \cdot A'_{\mathfrak{F}_2}$

Erzwingung der Torbedingung bei der Serienschaltung:

9 Transistor

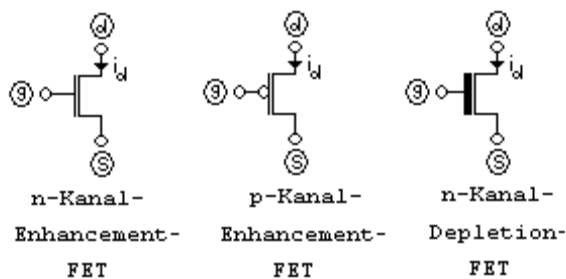
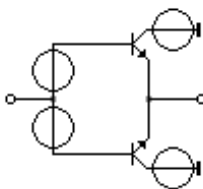
9.1 Bipolare Transistoren

Name	Schaltbild	Gleichungen
nnp-Transistor in Emitterschaltung		
nnp-Resistives Ebers-Moll-Modell		$i_e = -I_{es} \left(e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right) + \alpha_R I_{cs} \left(e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right),$ $i_c = \alpha_F I_{es} \left(e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right) - I_{cs} \left(e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right)$ $U_T = 26mV, I_{es} \approx I_{cs} \approx (10^{-12} \dots 10^{-10})A,$ $\alpha_R \approx 0.5, \alpha_F \approx 0.99$
Ersatzschaltung im Vorwärtsbetrieb		
Ersatzschaltung in Emitterschaltung		$i_e = I_{es} \left(e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right)$ $i_b = (1 - \alpha_F) i_e$ $i_c = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} i_b = \beta_F i_b$
Stückweise lineare Ersatzschaltung		$\frac{\partial i_b}{\partial u_{be}} \Big _{AP} = \frac{1}{r_e \beta_F}, r_e = \frac{U_T}{-I_e}$
Kleinsignalersatzschaltung		$\beta_F \Delta i_b = \frac{1}{r_e} \Delta u_{be}$
Ersatzschaltung mit unendl. Verstärkung		$\beta_F \rightarrow \infty$
npn-Resistives Ebers-Moll-Modell		$i_e = I_{es} \left(e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right) - \alpha_R I_{cs} \left(e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right),$ $i_c = -\alpha_F I_{es} \left(e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right) + I_{cs} \left(e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right)$

Spannungsverstärkung: $v_u := \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{u_2}{u_1}$

Stromverstärkung: $v_i := \frac{\Delta i_2}{\Delta i_1} = \frac{i_2}{i_1} = 1 + \beta_F$

Leistungsverstärkung: $v_p := \frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} = v_i \cdot v_u \approx \beta_F$



Prinzip der Komplementärstufe

9.2 Feldeffekttransistoren

9.2.1 Resitives Shichment-Hodges Modell:

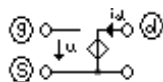
$$\text{npn-Modell: } i_d = \begin{cases} 0 & \text{falls } u_{gs} - U_{th} \leq 0 \\ \beta((u_{gs} - U_{th})u_{ds} - \frac{1}{2}u_{ds}^2) & \text{falls } 0 \leq u_{gs} - U_{th} \leq u_{ds} \\ \frac{1}{2}\beta(u_{gs} - U_{th})^2 & \text{falls } 0 \leq u_{gs} - U_{th} \leq u_{ds} \end{cases}$$

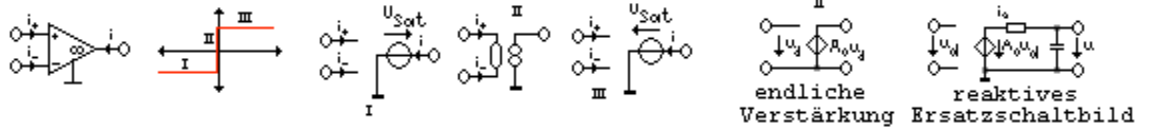
Falls $U_{th} < 0$ ("normally off"), dann Enhancement. Falls $U_{th} > 0$ ("normally on"), dann Depletion.

Mit Kanalmodulation:

$$i_d = \begin{cases} 0 & \text{falls } u_{gs} - U_{th} \leq 0 \\ \beta((u_{gs} - U_{th})u_{ds} - \frac{1}{2}u_{ds}^2)(1 + \lambda u_{ds}) & \text{falls } 0 \leq u_{gs} - U_{th} \leq u_{ds} \\ \frac{1}{2}\beta(u_{gs} - U_{th})^2(1 + \lambda u_{ds}) & \text{falls } 0 \leq u_{gs} - U_{th} \leq u_{ds} \end{cases}$$

$$\text{pnp-Modell: } i_d = \begin{cases} 0 & \text{falls } u_{gs} - U_{th} \leq 0 \\ -\beta((u_{gs} - U_{th})u_{ds} - \frac{1}{2}u_{ds}^2)(1 - \lambda u_{ds}) & \text{falls } 0 \leq u_{gs} - U_{th} \leq u_{ds} \\ -\frac{1}{2}\beta(u_{gs} - U_{th})^2(1 - \lambda u_{ds}) & \text{falls } 0 \leq u_{gs} - U_{th} \leq u_{ds} \end{cases}$$





10 Operationsverstärker

Schaltungsname	Schaltung	"Richtig" gepolt	"Falsch" gepolt	Prinzip
Komparator				$+U_{sat}$ für $u_{1+} > u_{1-}$ $-U_{sat}$ für $u_{1+} < u_{1-}$
Invertierender Verstärker				$u_1 = -\frac{R_0}{R_1} u_0$
Nicht-Invertierender Verstärker				$u_1 = (1 + \frac{R_0}{R_1}) \cdot u_0$
Spannungsfolger				$u_1 = u_0$
NIK				$u_0 = -R_L i_0$
Ideale Diode				
Konkaver Widerstand				
Konvexer Widerstand				
Summierer		$G = \sum_{i=1}^n G$	$G' = \sum_{i=1}^n G'$	$u_1 = -\sum_{i=1}^n \frac{G_i}{G_0} u_i + \frac{G'}{G} \sum_{i=1}^n u_i$
ISU, USI, ISI, USU				$\mu = 1 + \frac{R_0}{R_1}$
Gyrator				$\mu = \frac{R_0}{R}$

Part IV

Mehrtore

Mehrtor	Schaltbild	Matrizen
Mehrtor-Übertrager		$H' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{u_2} & -\frac{1}{u_3} & \dots & -\frac{1}{u_n} \\ \frac{1}{u_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{u_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{u_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Zirkulator		$M = E, N = \begin{bmatrix} 0 & -R & +R \\ +R & 0 & -R \\ -R & +R & 0 \end{bmatrix}, R = -N$
Multiplizierer		$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = h \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u_1 u_2}{u_M} \end{bmatrix}$
Dividierer		$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = h \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u_1}{u_D} \cdot u_D \end{bmatrix}$

Part V

Allgemeine Analyseverfahren

11 Beschreibungsgleichungen des Verbindungsmehrtor:

$$\begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \underline{0}, B' \cdot A'^T = 0, A' \cdot B'^T = 0$$

Lösungsraum des Verbindungsmehrtores:

$$\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_u \\ e_i \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_u \\ e_i \end{bmatrix}$$

Tellegenscher Satz: $U^T I = 0$

11.1 Kirchhoffgleichungen zu einem Baum

Schaltung mit einem Graph mit b Kanten und n Knoten hat $s=b-(n-1)$ linear unabhängige Schleifengleichungen. B_b sind die Baumzweige, E_s die Kanten, die nicht auf dem Baum liegen.

$$B \cdot \underline{u} = [B_b \quad E_s] \begin{bmatrix} \underline{u}_b \\ \underline{u}_v \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\text{Verbindungsmehtor: } \begin{bmatrix} B_b & E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-1} & -B_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_b \\ \underline{u}_v \\ \underline{i}_b \\ \underline{i}_v \end{bmatrix} = \underline{0}$$

11.2 Knotenspannungsanalyse

Hierbei ist A die Knoteninzidenzmatrix und \underline{u}_k die Spannung gegenüber Bezugspotential.

$$\begin{bmatrix} -A^T & E_b & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

11.3 Maschenstromanalyse

Hierbei ist B die durch die KVL aufgestellten Gleichungen des planaren Netzwerkgraphen und \underline{i}_m der Maschenstrom.

$$\begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & E_b & -B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{u} \\ \underline{i}_m \end{bmatrix} = \underline{0}$$

11.4 Tableaugleichungen

$$\text{Verbindungsmehtor: } \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{e} \end{bmatrix}$$

$$\text{Knotentableausystem: } \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{e} \end{bmatrix}$$

$$\text{Maschentableausystem: } \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & E_b & -B^T \\ M & N & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \\ \underline{i}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{e} \end{bmatrix}$$

Nichtlineare Tableauanalyse:

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \underline{0}, \underline{h}(\underline{u}, \underline{i}, t) = 0. \text{ Lösung durch den}$$

Newton-Raphson-Algorithmus $\underline{t}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}^{(j)}) + \underline{J}(\underline{x}^{(j)}) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^{(j)})$

Reduzierte Knotenspannungsanalyse:

$Y = -N^{-1}M$, $Y_k = AY A^T u_k, i_q = -A i_0$, dann $Y_k u_k = i_q$. Diese Form existiert nur wenn alle Elemente Spannungsgesteuert sind.

$$Z_m = B(-M^{-1}N)B^T, u_q = -B u_0 = -BM^{-1}e, \text{ dann } Z_m i_m = u_q$$

11.5 Direktes Aufstellen der reduzierten Knotenleitwertmatrix

Zuerst Aufstellen der n reduzierten Knotenleitwertmatrizen Y_i und dann Summation: $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$

11.5.1 Nicht Spannungsgesteuert Elemente in der Knotenleitwertmatrix:

Quellenumwandlung: Spannungsquelle (R_Q, U_Q) \rightarrow Stromquelle ($G_Q = \frac{1}{R_Q}, I_Q = G_Q U_Q$)

Dualwandlung: Vorschalten eines Gyrotoren erlaubt es, das Duale Element zu dem Zweitor einzusetzen.

Der Gyrotor wird durch die Gleichungen $i_1 = G_D u_2$ und $i_2 = G_D u_1$ modelliert (also durch zwei USIs).

Nulloreinbau: Nullator wird durch Ersetzung des Knotens $u_{k\beta}$ durch $u_{k\alpha}$ eliminiert. Der Norator wird durch einen "Superknoten" - der Zusammenfassung der beiden vorherigen - modelliert.

12 Netzwerkeigenschaften

Duales Netzwerk: $\begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \underline{0} \rightarrow \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \underline{0}$

Substitutionstheorem: Zwei Eintore $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ verbunden. Falls \mathfrak{N}_2 spannung(strom)gesteuert, so läßt es sich durch eine zeitvariante Spannungs(Strom)quelle ersetzen.

Superpositionsprinzip: In einem linearen, eindeutig lösbaeren Netzwerk setzt sich jede Spannung und jeder Strom aus der Summe der Reaktionen auf die einzelnen unabhängigen Quellen zusammen. Alle Quelle bis auf eine werden Leerlauf bzw. Kurzschluß ersetzt und die Ergebnisse nachher addiert.



Logikschaltungen: Durch resistive Netzwerke kann man die Logikschaltungen simulieren.

Part VI

Lineare Schaltungen ersten Grades

Lineare Schaltungen ersten Grades enthalten genau ein reaktives Eintor. Der Rest ist resistiv und linear.

Reaktanz	Resistives Eintor	Zustands-Gleichungen
Induktivität	Helmholtz/Thévenin-Ersatzszweipol	$\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_0(t)$
Kapazität	Mayer/Norton-Ersatzszweipol	$\dot{i}_C(t) = -\frac{1}{GL}i_C(t) + \frac{1}{GL}i_0(t)$
Allgemeine Form: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$		

12.1 Konstante Erregung:

$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) + \frac{1}{\tau}x(t_\infty)$ mit $\tau = RC$ bzw. $\tau = GL$ und $v=x(t_\infty) = U_0$ bzw. I_0 .

Lösung: $x(t) - x(t_\infty) = [x(t_0) - x(t_\infty)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$ (Für alle $t \geq t_0$).

Stabil für $\tau > 0$ und instabil für $\tau < 0$.

12.2 Allgemeine Erregung:

$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}x + \frac{1}{\tau}x_0(t)$ mit $\tau = RC$ bzw. $\tau = GL$ und $v=x(t_\infty) = U_0$ bzw. I_0 .

Lösung: $x(t) = x(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau}x_0(t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt'$ (Für alle $t \geq t_0$).

12.3 Dynamischer Pfad

Fix-/End-/Gleichgewichtspunkt: Strom durch die Kapazität (Spannung durch die Induktivität) wird null.

Tote Punkte: Läuft der dynamische Pfad in einen (nicht Ruhepunkt) hinein, so tritt das Sprungphänomen auf. Dies ist der Fall wenn man einen nicht spannungs(strom)gesteuerten stückweise linearen Widerstand mit einer Kapazität (Induktivität) beschaltet. Ist Q ein toter Punkt einer RC-(GL)-Schaltung ersten Grades. Erreicht der dynamische Pfad Q zum Zeitpunkt t_0 , so kann er durch einen Sprung nach P fortgesetzt werden, wobei P ebenfalls auf

der Kennlinie liegt und $u_C(t_0^-) = u_C(t_0^+)$ ($i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+)$) gelten muß und P der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft ist.

Die Richtung des Pfades wird stets durch die Ableitungen gegeben.

Part VII

Lineare Schaltungen zweiten Grades

Zustandsgleichung: $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}v(t)$

Ausgangsgleichung: $\underline{y}(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + dv(t)$

A Zustandsmatrix, \underline{x} Zustandsvektor, \underline{b} Einkoppelvektor, $v(t)$ Erregung, \underline{c}^T Auskoppelvektor und d Durchgriff der Erregung auf das Ausgangssignal $\underline{y}(t)$.

13 Aufstellen von Zustandsgleichungen:

1. Schritt: Umzeichnen, so daß die Reaktanzen außen liegen.

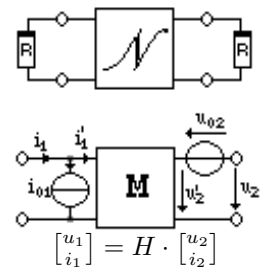
2. Schritt: Herausziehen sämtlicher Quellen und Wahl der Zustandsgrößen. Für eine Kapazität sei es i_L , für eine Induktivität u_C . Parallel zu Kapazitäten werden Stromquellen und in Reihe zu Induktivitäten werden Spannungsquellen geschaltet.

3. Schritt: Berechnung der zur Beschreibung gehörenden Matrix M .

4. Schritt: Berechnen von A , b , v , c und d .

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot H, \quad \underline{i}_0 = T \cdot \underline{v}, \text{ falls } v \text{ skalar: } \underline{i}_0 = \underline{t} \cdot v$$

$$b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \underline{t}, \quad c, d \text{ aus Vergleich}$$



14 Entwurf von Schaltungen zu Zustandsgleichungen

(Schaltung) (ESB)

15 Lösung der Zustandsgleichungen

15.1 Transformation auf Normalform:

Eigenwerte bestimmen:

$$T = SpA = a_{11} + a_{22} \text{ und } \Delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda T + \Delta = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$$

Eigenvektoren:

$$\underline{q}_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ q_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{q}_2 = \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Modalmatrix:

$$Q = [\underline{q}_1 \quad \underline{q}_2] = \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 & a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix},$$

15.1.1 Homogener Fall $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$

Allgemeine Lösung:

$$\underline{x}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \underline{q}_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \underline{q}_2$$

Falls zwei verschiedenen Eigenwerte und linear unabhängige Eigenvektoren existieren

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \begin{bmatrix} q_{22} & -q_{12} \\ -q_{21} & q_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \end{bmatrix}$$

Nun sei $\Lambda := Q^{-1}AQ$ und $\underline{\xi} = Q^{-1}\underline{x}$ und somit $\dot{\underline{\xi}} = \Lambda \underline{\xi}$

$$\text{Lösung: } \underline{\xi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \underline{q}_1 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \underline{q}_2 \end{bmatrix} \underline{\xi}_0 \text{ und } \underline{x}(t) = Q \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \underline{q}_1 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \underline{q}_2 \end{bmatrix} Q^{-1} \underline{x}_0$$

15.1.2 Autonome Differentialgleichungen (konstante Erregung) $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{v}_0$

Ist A invertierbar, so läßt sich dieser Fall auf den homogenen zurückführen.

$$\text{Sei } \underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_\infty, \quad \dot{\underline{x}}' = \dot{\underline{x}}, \quad \underline{x}_\infty = -A^{-1}\underline{v}_0, \text{ dann } \dot{\underline{x}}' = A \cdot \underline{x}'$$

15.1.3 Differentialgleichungen mit allgemeiner Erregung $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{v}(t)$

$$\underline{\xi}(t) = e^{\Lambda t} \underline{\xi}_0 + \int_0^t e^{\Lambda(t-t')} Q^{-1} B \underline{v}(t') dt' = \underbrace{e^{\Lambda t} \underline{\xi}_0}_{\text{zero-input-response}} + \underbrace{\int_0^t e^{\Lambda(t-t')} \underline{v}'(t') dt'}_{\text{zero state response}}$$

15.2 Transformation auf Jordan-Normalform

Falls $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ versagt die Transformation auf Normalform. Dann wird J so bestimmt, daß

unter Verwendung von $Q' = \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{12} \\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2} & \frac{a_{11}-a_{22}}{2} - 1 \end{bmatrix}$ gilt $J = Q^{-1}AQ$.

Lösung: $\underline{\xi}(t) = e^{Jt}\underline{\xi}_0 = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix} \underline{\xi}_0, \underline{x}(t) = Q'\underline{\xi}(t)$

15.3 Transformation auf reellwertige Normalform

Falls $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, existiert auch noch eine weitere reellwertige Normalform

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Dann gilt $A = Q'\Lambda Q'^{-1}$ und $\underline{\xi}_0 = \begin{bmatrix} \gamma+j\delta \\ \gamma-j\delta \end{bmatrix}$ mit $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Somit $\underline{\xi}' = \begin{bmatrix} e^{(\alpha+j\beta)t}\xi_0 + e^{(\alpha+j\beta)t}\xi_0^* \\ -j(e^{(\alpha+j\beta)t}\xi_0 - e^{(\alpha+j\beta)t}\xi_0^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{\alpha t}(\gamma \cos \beta t - \delta \sin \beta t) \\ 2e^{\alpha t}(\delta \cos \beta t + \gamma \sin \beta t) \end{bmatrix}$ mit $\underline{\xi}'_0 = \begin{bmatrix} \xi_0 + \xi_0^* \\ j(\xi_0 - \xi_0^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\gamma \\ 2\delta \end{bmatrix}$

15.4 Trajektorien

$$\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + v_{02}}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_{01}}$$

Isoklinen: $x_2 = \frac{a_{21} - ma_{11}}{ma_{12} - a_{22}}x_1 + \frac{v_{02} - mv_{01}}{ma_{12} - a_{22}}$ mit $m = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + v_{02}}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_{01}}$. Laufrichtung

wird durch $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}$ bestimmt.

15.5 Phasenportraittabelle

15.6 Zeitverläufe von Zustandsvariablen

Schwingung	Gleichung	β	Zusatzbed.
Ungedämpft	$\xi_1(t) = k \cos(\beta t + \Theta)$	$\beta^2 = \omega_0^2 = \Delta$	
Schwach gedämpft	$\xi_1(t) = k e^{\alpha t} \cos(\beta t + \Theta)$	$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$	$\alpha < 0$
Stark gedämpft	$\xi_1(t) = \xi_{01} e^{\alpha t}$		$\alpha < 0$
Aperiodisch gedämpft	$\xi_1(t) = (\xi_{01} + \xi_{02}t) e^{\alpha t}$		$\alpha < 0$

Part VIII

Nichtlineare Schaltungen

Aufstellung der autonomen Systemgleichung: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ (Direktes Auf-

stellen der Zustandsgleichung).

16 Gleichgewichtspunkt:

$$\dot{\underline{p}} = \underline{0} \implies \underline{f}(\underline{p}) = 0$$

Bestimmung aus der Zustandsbeschreibung: Nullsetzen von $\dot{\underline{x}}$.

Bestimmung direkt aus der Schaltung: Ersetzen der Induktivitäten durch Kurzschlüsse und der Kapazitäten durch Leerläufe.

16.1 Linearisierung der Schaltung am Gleichgewichtspunkt

Linearisierung der Schaltung am Gleichgewichtspunkt erlaubt ein exaktes Vorgehen:

$$\Delta \dot{\underline{x}} \approx J_i \cdot \Delta \underline{x} \text{ mit } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Satz von Hartmann:

Wenn in einem Gleichgewichtspunkt p der Realteil aller Eigenwerte der Jacobimatrix $J(p)$ ungleich null ist, dann verhält sich das System in einer Umgebung von p qualitativ genauso wie ein lineares System mit derselben Systemmatrix. Man kann dann anhand der Eigenwerte den Typ des Gleichgewichtspunktes (Sattell, stabiler und instabiler Knoten) bestimmen. Insbesondere bei Sattelpunkten wird man dann weiter die Eigenvektoren berechnen, um lokal den Verlauf der Trajektorien anzugeben.

17 Skizze des Phasenportraits:

1. Gleichgewichtspunkte einzeichnen
2. Eigenvektoren andeuten
3. Lokales Phasenportrait in der Nähe der Gleichgewichtspunkte skizzieren.
4. Isoklinen für $m = 0$ und $m \rightarrow \infty$.
 - 4.1. $f_1(x_1, x_2) = 0$ ist die Isokline zu $m \rightarrow \infty$.
 - 4.2. $f_2(x_1, x_2) = 0$ ist die Isokline zu $m = 0$.
5. Einige weitere Trajektorien freihändig skizzieren.

18 Konservative Schaltungen:

Allgemein: $(\text{grad } E)^T \dot{\underline{f}} = 0$ oder $\dot{E} = 0$

$$\text{Zweidimensional: } \frac{\partial E}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2} \cdot \dot{x}_2 = 0$$