Formelsammlung Elektrizitätslehre

Mehrfachintegrale

Kartesische Koordinaten

Wegstrecke s: $s = \int_{x=x_0}^{x_1} dx$

Fläche A: $A = \int_{a=a_0}^{a_1} dA(\vec{r}) = \int_{y=y_0}^{y_1} \int_{x=x_0}^{x_1} dx\, dy$

Volumen V: $V = \int_V dV(\vec{r}) = \int_{z=z_0}^{z_1} \int_{y=y_0}^{y_1} \int_{x=x_0}^{x_1} dx\, dy\, dz$

Zylinderkoordinaten

Mantelfläche A_M: $A_M = \int_A dA(\vec{r}) = \int_{z=0}^{H} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\, d\varphi\, dy = 2\pi r H$

Deckfläche A_D: $A_D = \int_A dA(\vec{r}) = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\, d\varphi\, dr = \pi r^2$

Volumen V: $V = \int_V dV(\vec{r}) = \int_{z=0}^{H} \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\, d\varphi\, dr\, dz = \pi h\, r^2$

Diese Formelsammlung wurde von Jan Peters (www.jan-peters.net) erstellt und hat vielen Studenten durch ihr Vordiplom geholfen. Den Autoren wuerde ein Link zu seiner Downloadseite..
http://www.jan-peters.net/Miscellaneous/LectureNotes
sehr freuen!

Sphärische oder Kugelkoordinaten

Oberfläche $A_{K:}$ $\quad A_k = \int_A dA = \int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r \sin\vartheta \; d\varphi \; r \; d\vartheta = 4\pi R^2$

Volumen $V_{K:}$ $\quad V_k = \int_V dV = \int_{r=0}^{R}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r \sin\vartheta \; d\varphi \; r \; d\vartheta \, dr$

$$= \int_{r=0}^{R}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Beispiele

Volumenintegral : $Q = \int_{VdQ} (\vec{r}) = \int_{V\varrho} (\vec{r}) \cdot dV(\vec{r})$

Flächenintegral : $I = \int_{AdI} (\vec{r}) = \int_A \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \, dA(\vec{r}) = \int_A \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}(\vec{r})$

Wegintegral : $U = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{} \quad r$

Basisvektormultiplikation

$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0$ mit $i \in \{x, y, z\}$

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \quad \wedge \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad \wedge \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_Y$

$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z \quad \wedge \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_Y = -\vec{e}_x \quad \wedge \quad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_Y$

Elektrostatik

Kräfte zwischen Punktladungen

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{q_i\, q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Dielektrizitätskonstante $\varepsilon := \varepsilon_0\, \varepsilon_r$, $\varepsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$,

Permittivitätszahl $\varepsilon_r \geq 1$.

Elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

Dielektrische Verschiebung

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon\, \vec{E}(\vec{r})$$

Konservative Kraftfelder

$\vec{F}(\vec{r})$ heißt konservativ $\Leftrightarrow \int_{C(P_1,P_2)} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$ hängt nur von P_1, P_2 ab.

<u>Kriterium :</u> $\forall\ i, j. \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ mit $i \neq j$,

wenn der Definitionsbereich einfach zusammenhängend

Elektrostatische Felder sind immer konservativ.

Energiegehalt des elektrischen Feldes:

$$W_{el} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}\, V$$

Energiedichte des elektrischen Feldes:

$$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Elektrische Arbeit

$$W_{12} = \int_{C(P_1)}^{C(P_2)} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{F}(\vec{r}(\lambda)) \frac{d\vec{r}}{d\lambda}\, d\lambda = \int_C \sum_{j=1}^{N} F_j\, dx_j$$

Elektrische Spannung

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{q} = \int_{C(P_1,P_2)} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Elektrisches Potential

$$\Phi(\vec{r}) = U_{P,Po}$$

Influenz

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\Phi$$

Äquipotentialflächen

Die Flächen $\Phi(\vec{r}) = \Phi_0$; $\vec{E} \,||\, \vec{n}$, also $\vec{E}$ senkrecht auf den Äquipotentialflächen.

Leiter sind Äquipotentialgebiete.

Raumladungsdichte

$$\int_V \varrho(\vec{r})\, dr^3 = \int_V \varrho(\vec{r})\, dx\, dy\, dz = Q(V)$$

Oberflächenladungsdichte

$$\int_S \sigma(\vec{r})\, da = \int_V \sigma(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\, dv = Q(S)$$

$$\vec{D} \cdot \vec{N} = \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{N} = \sigma$$

Gaußsches Gesetz

$$\int_{H=\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = \sum_{r_i \in V} q_i$$

$$\int_V \varrho(\vec{r})\, dr^3 = Q(V)$$

$$\int_S \sigma(\vec{r})\, da = Q(V \cap S)$$

Kapazität

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\varepsilon \int_H \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{a}}{\int_{C(P_1,P_2)} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r}}$$

Plattenkondensator: $C = \varepsilon \frac{A}{d}$ Kugelkondensator: $C = 4\pi\varepsilon \frac{a \cdot b}{a - b}$

Parallelschaltung: $C_p = \sum_{i=1}^{N} C_i$ Serienschaltung: $\frac{1}{C_S} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$

"Parallele" Dielektrische Materialien:

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_1 \frac{A_1}{d} + \varepsilon_2 \frac{A_2}{d} = C_1 + C_2$$

"Serielle" Dielektrische Materialien:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Energiegehalt des Kondensators $W_{el} = \frac{1}{2} C U^2$

Stationäre Ströme

Ladungstransport im elektrischen Feld

Stationäre Ströme : $I\,(A) = \frac{dQ}{dt} = \int_A \vec{j}\, d\vec{a}$

Eine Trägersorte : $\vec{j} = qn\vec{v} = \varrho\vec{v}$ mit $\varrho(\vec{r}) = q \cdot n(\vec{r})$

Mehrere Trägersorten : $\vec{j} = \sum_{i=1}^{N} \vec{j}_i = \sum_{i=1}^{N} q_i\, n_i\, \vec{v}_i$

Transport ohne Stoßprozesse (Vakuum) :

$$\frac{1}{2}\, m\,(v_2^2 - v_1^2) = qU_{12}$$

$$v_1 = v\,(t_0 = 0) = 0 \Longrightarrow v\,(U) = \sqrt{\frac{2\,qU}{m}}$$

Transport mit Stoßprozessen (Leiter) :

$$\vec{v} = \text{sign}\,(q)\,\mu\,\vec{E} \;\text{ mit Beweglichkeit }\; \mu = \frac{|q| < \Delta t >}{m^*}$$

Eine Trägersorte : $\vec{j} = n\,|q|\,\mu\,\vec{E}$

Mehrere Trägersorten : $\vec{j} = \sum_{i=1}^{N} \vec{j}_i = \vec{E} \sum_{i=1}^{N} n_i\, |q_i|\, \mu_i := \sigma\,\vec{E}$

Ohmsches Gesetz

$I = GU \qquad U = RI \qquad G = \frac{\sigma A}{l}$

Spezifischer Widerstand : $\varrho = \frac{1}{\sigma}$

Serienwiderstand : $R_p = \sum_{i=1}^{N} R_i$ Parallelschaltung : $\frac{1}{C_S} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$

Ladungserhaltung :

$-\frac{dQ\,(V)}{dt} = \int_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{a}$ Für jede Hüllfläche ∂V : $\int_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{a} = 0$

Netzwerkanalyse

Kirchhoffsche Knotenregel : $\sum_{k=1}^{N} I_k = 0$

Kirchhoffsche Maschenregel : $\sum_{k=1}^{N} U_k = 0$

Maschenstromanalyse :

k Knoten, **z** Zweige $\Longrightarrow$ $m = z - (k-1)$ Maschengleichungen

Quellen

Spannungsquelle :

$$I_{max} = \frac{U_0}{R_i}$$

Stromquelle

$$I = I_0 - I_i \qquad U_k = R_i \cdot I_i = R_i \cdot (I_0 - I_i)$$

Leistung

Elektrische Leistung : $P_{el} = \frac{dW_{el}}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$

Leistungsdichte bei bewegter Raumladung : $P_{el} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Verlustleistung bei ohmscher Driftbewegung : $P_{el} = \sigma \overline{|\vec{E}|}^2 = \frac{\overline{|\vec{j}|^2}}{\sigma}$

Verlustleistung am ohmschen Widerstand : $P_{el} = U \cdot I = RI^2 = \frac{U^2}{R}$

Elektrische Energieübertragungsverluste

$$\eta = 1 - \frac{P_E}{U_E^2} \cdot R_L$$

Magnetostatik

Lorenzkraft

Lorenzkraft : $\vec{F}_L = q\,\vec{v}\times\vec{B}$ **Lorenzkraftdichte :** $\vec{f}_L = \vec{j}\times\vec{B}$

Superpositionsprinzip : $\vec{F} = q\left(\vec{v}\times\vec{B} + \vec{E}\right)$

Magnetfelder leisten keine Arbeit! $\vec{B}$ heißt Magnetische Flußdichte.

Magnetische Feldstärke : $\vec{H} := \dfrac{\vec{B}}{\mu}$

Bewegung im Homogenen Magnetfeld

$$\vec{B} = B\,\vec{e}_z \wedge \vec{v}\times\vec{B} = \begin{pmatrix} Bv_y \\ -Bv_x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} Bv_y \wedge \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} Bv_x \wedge \frac{dv_z}{dt} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} v_x(t) = v_\perp \cdot \sin[\Omega(t-t_0)] \\ v_y(t) = v_\perp \cdot \cos[\Omega(t-t_0)] \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{dv_x}{dt} = v_\perp\,\Omega \cdot \cos[\Omega(t-t_0)] \Rightarrow \Omega = \frac{q\cdot B}{m}$$

(Gyratorenfrequenz)

Trajektorie :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(\tau)\,d\tau = x(t_0) - \frac{v_\perp}{\Omega}\cos[\Omega(t-t_0)]$$

$$y(t) = y(t_0) + \frac{v_\perp}{\Omega}\sin[\Omega(t-t_0)] \wedge z(t) = z(t_0) + v_{||}(t-t_0)$$

Schraubenradius $\mathbf{R} = \dfrac{v_\perp}{\Omega}$

Kraft und Drehmoment auf stromführende Leiter

$$\vec{F}_{\text{Leiter}} = \int_V \vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})\,d^3 r$$

Linienförmige Leiter :

$$\vec{F}_{\text{Leiter}} = -\int_V \vec{B}(\vec{r})\times I\,d\vec{r}$$

Drehmoment einer Leiterschleife :

Vektorielle Fläche $\vec{A} := \vec{R}\times\vec{b}$

Drehmoment : $\vec{M} = I\,\vec{A}\times\vec{B}$

Magnetisches Moment $\vec{m} = \mu I\cdot\vec{A}$

Permabilität und Suszeptibilität

Magnetische Permabilität $\mu := \mu_0 \, \mu_r$

Magnetische Suszeptibilität : $x := \mu_r - 1$

Klassifikation von Materialien :

1. $\mu_r \prec 1, \ \ | x | \ll 1 \Longrightarrow$ Diamagnetismus durch Induktion atomarer Ringströme, wirkt dem äußeren Feld entgegen.

2. $\mu_r \succ 1, \ \ | x | \ll 1 \Longrightarrow$ Paramagnetismus : Orientierung vorhandener atomarer Ringströme

3. $\mu_r \gg 1 \Longrightarrow$ Ferromagnetismus. Magnetische Domänen, Weißsche Bezirke – geht oberhalb der Curie – Temperatur in Paramagnetismus über.

Hysteresekurve :

$B_{r\text{: Remanenz}}$ $H_{C\text{: Koerzitivkraft}}$

Magnetisch hart, $B_r \cdot H_C$ **groß** **Magnetisch weich,** $B_r \cdot H_C$ **klein**

Zwei zentrale Aussagen :

Magnetostatik : $\int_{\partial V} \vec{B} \, d\vec{a} = 0$ **(Quellenfreiheit d. Magnet. Feldes)**

Amperésches Durchflutungssesetz : $\int_{\partial A} \vec{H} \, d\vec{r} = \int_{A} \vec{j} \, d\vec{a} = I(A)$

Beispiele :

Unendlich langer Draht $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\,\vec{e}_\varphi$

Kräfte zw. zwei unendlich langen Drähten : $\frac{d\vec{F}_{12}}{dz} = -\frac{\mu I_1 I_2}{2\pi a}\,\vec{e}_{12}$

Zylindersymmetrischer Verteilung $H_\varphi(r) = \frac{1}{r}\int_0^r j(r')\,r'\,dr'$

Spezialfall : Gerader Draht $H_\varphi(r) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi a^2}\,r & \text{falls } 0 \leqslant r \leqslant a \\ \frac{I}{2\pi r} & \text{falls } r > a \end{cases}$ Zeichnung!!!

Biosavartsches Gesetz

Allgemein : $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r})\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,d^3r$

Linienförmige Leiter : $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi}\int_V \frac{d\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3} = \frac{I}{4\pi}\int_V \frac{(\vec{s}-\vec{r})\times d\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{s}|^3}$

Magnetischer Kreis

$$\int_{\partial V}\vec{B}\,d\vec{a} = 0 \;\Rightarrow\; \sum \phi_k = 0 \text{ mit } \phi_k = \int_{A_k}\vec{B}\,d\vec{a}$$

$$V_{m_i} := \int_C \vec{H}\,d\vec{r} = Iw \;\wedge\; V_{m_i} = R_{m_i}\cdot\phi_i \;\wedge\; R_{m_i} = \frac{l}{\mu A}$$

$$\int_C \vec{H}\,d\vec{r} = Iw = |\vec{H}_k|\,l_k + |\vec{H}_s|\,l_s = \frac{B}{\mu_0\,\mu_k}\,l_k + \frac{B}{\mu_0\,\mu_s}\,l_s$$

$$B = \frac{\mu_0\,wI}{\mu_k\,l_k + \mu_s\,l_s}$$

Bewegungsinduktion

$$\vec{E}_{ind} = \vec{v}\times\vec{B} \;\wedge\; U_{ind} = -\frac{d\phi(A)}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{A(t)}\vec{B}\,d\vec{a}$$

Beispiele:

Barlowsches Rad (Unipolarmaschine)

$$U_{ind} = \int_{C(P_1,P_2)} \vec{v}\times\vec{B}\, d\vec{r} = \Omega\cdot B\int_0^a r\,dr = \frac{1}{2}\,\Omega B a^2 \quad \text{wegen } \vec{v} := \Omega r\,\vec{e}_\varphi$$

Galvanomagnetismus

In einem leitfähigen Medium bewegen sich Ladungsträger mit Ladung q und Geschwindigkeit $\vec{v}$.

$$\vec{F} = q\left(\vec{v}\times\vec{B} + \vec{E}_{el}\right)$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = \sigma\frac{\vec{F}}{q} = \sigma\left(\underbrace{\vec{v}\times\vec{B}}_{\vec{E}_H} + \vec{E}_{el}\right) \wedge \vec{j} = qn\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{qn}\vec{j}$$

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E}_{el} + R_H\,\vec{j}\times\vec{B}\right) \text{mit } R_H = \underbrace{\text{Faktor}}_{\text{0,7 bis 1,3, Meßwert}}\cdot\frac{1}{qn}$$

Halleffekt:

$$U_H = \int_C \vec{E}_H\, d\vec{r} = |E_H|\cdot d = \left|R_H\,\vec{j}\times\vec{B}\right|\cdot d$$

Ruheinduktion

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\int_A \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\, d\vec{a}$$

Allgemeines Induktionsgesetz

Leiterschleife $\partial A(t)$, Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}(\vec{r}, t)\, d\vec{a} = -\frac{d}{dt}\Phi(A(t)) = \int_{\partial A(t)} \vec{E}_{ind}(\vec{r}, t)\, d\vec{r}$$

Induktivität

Grundsätzliche Annahmen :

1. Orstfeste Anordnung mehrer stromdurchflossener Leiterschleifen
2. Quasistationäre Ströme, $\frac{dI_i}{dt}$ erzeugt kein Strahlungsfeld

Spule als Generator

$$U_{ind} = w\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \quad \text{mit } \psi = w\phi \text{ und } \phi = A\cdot \left|\vec{B}(t)\right|$$

Spule als Verbraucher

$$U_{ind} = L\frac{dI}{dt}$$

Verketteter Kraftfluß

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{w_i \mu_i}{4\pi} \int_{A_i}\int_{C_i} \frac{d\vec{r}_j \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} d\vec{a}}_{L_{ij}:=f(\text{Geometrie},\mu_i)} \cdot I_j = \sum_{j=1}^{N} L_{ij}\cdot I_j$$

L_{ii} heißt Selbstinduktion, L_{ij} heißt Gegeninduktion. Es gilt $L_{ij} = L_{ji}$.

Transformator

Allgemein : $U_j = I_j R_j - U_{ind,j}$

$$U_j = I_j R_j + \sum_{k=1}^{N} L_{jk} \frac{dI_k}{dt}$$

Spezialfall : Zwei Spulen

$u_1(t) = L_{11} \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2$

$u_2(t) = L_{21} \dot{I}_1 + L_{22} \dot{I}_2$

Man definiert $L_1 := L_{11};\ L_2 := L_{22};\ M := L_{12=} L_{21}$

Spannungsübersetzung :

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{I_2=0} = \frac{L_{21}}{L_{11}} = \frac{M}{L_1}$$

Stromübersetzung :

$$\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)_{U_2=0} = \frac{L_{12}}{L_{22}} = \frac{M}{L_2}$$

Kopplungsfaktor : $\kappa = \sqrt{\left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{I_2=0} \cdot \left(-\frac{I_2}{I_1}\right)_{U_2=0}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

Spezialfall : Dreischenkelkern

$$N = R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m1} R_{m3}$$

$$L_{11} = L_1 = \frac{w_1^2}{N} (R_{m2} + R_{m3})$$

$$L_{22} = L_2 = \frac{w_2^2}{N} (R_{m1} + R_{m3})$$

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{w_1 w_1}{N} R_{m3}$$

$$\kappa^2 = \frac{R_{m3}^2}{(R_{m2} + R_{m3})(R_{m1} + R_{m2})}$$

Spannungsübersetzung :

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{I_2=0} = \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} \frac{w_2}{w_1}$$

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{I_2=0} = \kappa \frac{w_2}{w_1}$$

Stromübersetzung :

$$\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)_{U_2=0} = \frac{R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}} \frac{w_1}{w_2}$$

$$\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)_{U_2=0} = \kappa \frac{w_1}{w_2}$$

falls $R_{m1} + R_{m2}$ **!!!**

Energieinhalt bei Stromanstieg

$$W_{mag} = \int_{\hat{I}=0}^{I} L\,\hat{I}\,d\hat{I} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\psi I$$

Energiedichte

$$w_{mag} = \frac{W_{mag}}{V} = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\mu\,\vec{H}^2$$

Wechselstromlehre

Grundlagen

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

$$\phi(t) = \int_{A(t)} \vec{B}\cdot d\vec{a} = A\,|\vec{B}|\,\cos\varphi(t)$$

$$u(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \phi_{max}\,\omega\cdot\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\underline{\underline{D}}(\omega t) := \begin{pmatrix} \cos\varpi t & -\sin\varpi t \\ \sin\varpi t & \cos\varpi t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{U}} = \begin{pmatrix} \hat{U}\cdot\cos\varphi_u \\ \hat{U}\cdot\sin\varphi_u \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{\underline{D}}(\omega t)\,\underline{\hat{U}} \;\wedge\; \underline{i}(t) = \underline{\underline{D}}(\omega t)\,\underline{\hat{I}}$$

Vernachlässigungen bei $\omega = 2\pi f \ll 4\,\text{MHz}$

(1) Vernachlässigung parasitärer Elemente : (α = R, L, C)

$$|u_{Lp}| = L_P\cdot\left|\frac{di_\alpha}{dt}\right| \ll |u_\alpha|$$

$$|i_{Cp}| = C_P\cdot\left|\frac{du}{dt}\right| \ll |i_\alpha|$$

$$\omega \ll \min\left\{\frac{1}{L_P}\frac{|u_\alpha|}{|i_\alpha|};\ \frac{1}{C_P}\frac{|i_\alpha|}{|u|}\right\}$$

(2) $\forall\, t\in\mathbb{R}.\ \sum_k i_k(t) = 0$

(3) $\forall\, t\in\mathbb{R}.\ \sum_k u_k(t) = u_e$ (eingeprägte Spannungsquellen)

Komplexe Darstellung

$\underline{U}(t) = \hat{U}\begin{pmatrix}\cos(\varphi_u + \omega t)\\ \sin(\varphi_u + \omega t)\end{pmatrix} = \hat{U}\cdot e^{j(\varphi_u+\omega t)}$ $\wedge$ $\underline{I} = \hat{I}\cdot e^{j(\varphi_i+\omega t)}$

Für lineare Bauelement $\underline{U} = |Z| \cdot \underline{\hat{I}}$ Komplexer Leitwert $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

$\arg \underline{Z} = \varphi_u - \varphi_i = \psi = \arctan \frac{\mathrm{Im}\,\underline{Z}}{\mathrm{Re}\,\underline{Z}}$

Effektivwerte

$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{I}$ $\wedge$ $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{U}$

Leistung

Momentanleistung : $P_m = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos\underbrace{(\varphi_u - \varphi_i)}_{\varphi} = I_{eff}\,U_{eff}\cos\varphi$ (auch Wirkleistung)

Scheinleistung : $P_S = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I} = I_{eff}\,U_{eff}$

Blindleistung : $P_B = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\sin(\varphi_u - \varphi_i) = I_{eff}\,U_{eff}\sin\varphi$