Formelsammlung Höhere Mathematik I + II

Allgemeines

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Summenformeln

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\, n\,(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k} = \begin{cases} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \\ (n+1)\, a^n \end{cases} \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Elementare Sätze :

$(1+h)^n \geq 1+nh,\;$ falls $h > -1$ $\qquad |a+b| \leq |a| + |b|$

Cosinussatz : $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot \cos\gamma$ $\qquad$ Sinussatz : $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2\,a} \pm \frac{1}{2\,a}\sqrt{b^2 - 4\,ac}$$

Rationale Nullstellen von $f\,(x) = a_n\, x^n + \ldots + a_1\, x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ findet man unter den Brüchen $\frac{a}{b}$ in denen a Teiler von a_0 ist und b Teiler von a_n ist.

Diese Formelsammlung wurde von Jan Peters (www.jan-peters.net) erstellt und hat vielen Studenten durch ihr Vordiplom geholfen. Den Autoren wuerde ein Link zu seiner Downloadseite.. http://www.jan-peters.net/Miscellaneous/LectureNotes sehr freuen!

Aussagen über die trigonometrischen Funktionen

Allgemein :

$\sin(\varphi + 2\pi k) = \sin\varphi$ $\quad$ $\cos(\varphi + 2\pi k) = \cos\varphi$ $\quad$ $\tan(-x) = -\tan x$

$\sin(\varphi \pm \pi) = -\sin\varphi$ $\quad$ $\cos(\varphi \pm \pi) = -\cos\varphi$ $\quad$ $\tan(x + \pi) = \tan x$

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\quad$ $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

$\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi$ $\quad$ $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Additionstheoreme von Sinus und Cosinus

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \quad \wedge \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\sin x \pm \sin y = 2 \sin\frac{x \pm y}{2} \cos\frac{x \mp y}{2} \quad \wedge \quad \cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x + y}{2} \cos\frac{x - y}{2}$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \quad \wedge \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \quad \wedge \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

$$\sin\delta + \sin 2\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\delta\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x + y}{1 - xy} \pm \pi \quad \text{für } xy \neq 1$$

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Harmonische Schwingungen

Harmonische Schwingung: $s(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$

α Nullphase, $\omega t + \alpha$ Phase, A Amplitude, $f := \frac{1}{T}$ Frequenz und Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Superposition von $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ und $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$:
$s(t) := s_1(t) + s_2(t)$
mit $A = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\cos\alpha = \frac{u}{A}$, $\sin\alpha = \frac{v}{A}$, $u := A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2$ und
$v := A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2$.

Aussagen über die e − Funktion

Euler − Formel: $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi \quad \wedge \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \wedge \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$

Formeln von De Moivre:
$e^{i\varphi}\cdot e^{i\phi} =$
$e^{i(\varphi+\phi)} \quad \wedge \quad (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \quad \wedge \quad \overline{e^{i\varphi}} = \quad e^{i(-\varphi)} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

$$a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} = \left[a_1 e^{i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t} + a_2 e^{-i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t}\right] e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t}$$

Hyperbolikusfunktionen

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \wedge \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \wedge \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad \wedge \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\text{arsinh} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad \wedge \quad \text{arcosh} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Sphärische Trigonometrie

1. Cosinussatz: $\cos a = \cos c \cos b + \cos\alpha \sin c \sin b$
2. Cosinussatz: $\cos a = -\cos\beta \cos\gamma + \cos a \sin\gamma \sin\beta$

Sinussatz: $\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$

Abschätzung des natürlichen Logarithmus

$$\forall\, y > 0: \quad 1 - \frac{1}{y} \le \ln y \le y -$$

$$1 \qquad\qquad \frac{1}{n+1} \le \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$$

$$C_n := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n \quad \text{und für } n \longrightarrow \infty \text{ geht } C_n \longrightarrow C \approx 0,\ 57722...$$

(C heißt Euler – Mascheroni – Konstante)

Komplexe Zahlen

Sei $z = u + iv \in \mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, **dann gilt:**

$$\bar{z} = u - iv \quad \wedge \quad \mathrm{Re}(z) = u \quad \wedge \quad \mathrm{Im}(z) = y \quad \wedge \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Umwandlung Kartesisch ⟶ Polar

Gegeben: $z = u + iv$

Dann: $z = re^{i\varphi}$ **mit**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y \ge 0 \\ -\arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

Umwandlung Polar ⟶ Kartesisch

Gegeben: $z = re^{i\varphi}$

Dann: $z = u + iv$ **mit**

$$u = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad v = r\sin\varphi$$

Rechenarten:

Addition / Subtraktion: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)\,i$

Multiplikation: $r_1\, e^{i\varphi} \cdot r_2\, e^{i\phi} = r_1 \cdot r_2\, e^{i(\varphi+\phi)}$

Division: $r_1\, e^{i\varphi} / r_2\, e^{i\phi} = (r_1 / r_2)\, e^{i(\varphi-\phi)}$

n – te Wurzel: $\sqrt[n]{a} = \left\{ \sqrt{|a|} \cdot e^{i\frac{\varphi+k\pi}{n}} \;\middle|\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}$

2 – te Wurzel: $z = \pm\sqrt{a + ib} = \begin{cases} \pm\left[\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right] & \text{falls } b \ge 0 \\ \pm\left[\sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right] & \text{falls } b < 0 \end{cases}$

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Rechenregeln für Vektoren

Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar komponenten – weise, assoziativ, kommutativ und distributiv.

Linearkombination : $\underline{z} = \sum_{i=1}^{m} \underline{x}_i \lambda_i$

Skalarprodukt : $\underline{x}^T \underline{y} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$, $\quad \left| \underline{x}^T \underline{y} \right| = \underline{\|x\|} \cdot \underline{\|y\|} \cdot \cos\varphi$

Vektorprodukt : $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$, $\quad \left| \underline{x} \times \underline{y} \right| = \underline{\|x\|} \cdot \underline{\|y\|} \cdot \sin\varphi$

$\underline{x} \times \underline{y} = -\underline{y} \times \underline{x}$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \frac{1}{4} \|\underline{u} + \underline{v}\|^2 - \frac{1}{4} \|\underline{u} - \underline{v}\|^2$

Grassmann – Id. : $a \times (b \times c) = (a^T c) b - (a^T b) c$

Spatprodukt : $[a, b, c] := c^T (a \times b) = \det(a, b, c)$

Regeln :

a, b, c linear unabhängig $\Leftrightarrow \det(a, b, c) \neq 0$

a, b, c Rechts – System $\Leftrightarrow \det(a, b, c) > 0$

a, b, c Links – System $\Leftrightarrow \det(a, b, c) < 0$

Flächeninhalte und Volumina

Flächeninhalt eines n – Ecks :

$$F_A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} y_0 + y_{i-1} x_0)$$

Parallelogramm : $F = \|a \times b\|$ **Dreieck :** $F = \frac{1}{2} \|a \times b\|$

Tetraedervolumen : $\left| \frac{1}{6} \det(a, b, c) \right|$ **Spatvolumen :** $\det(a, b, c)$

Rechenregeln für Matrizen

Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar elementweise, assoziativ, kommutativ und distributiv.

Transposition: $(a_{i,j})^T = (a_{j,i})$

Matrixprodukt: $(A \cdot B)_{i,j} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$

(letztere ist assoziativ und distributiv, aber NICHT kommutativ).

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\alpha^*_{ij})$ **mit** $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Lineare Gleichungsysteme

$A\,\underline{x} = \underline{b}$

Lösung durch: (1) Gauß – Algorithmus (2) Determinanten

Fallunterscheidung:

Umwandlung der Matrix in Treppenform:

$$(A\, b) \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{pmatrix} C & d \\ & e \end{pmatrix}$$

Regulärer Fall: e existiert nicht und d hat n Komponenten

Singulärer Fall ohne Lösung: $r < n$ **und** $\underline{d} \neq \underline{0}$

Singulärer Fall mit unendlich vielen Lösungen: $r < n$ **und** $\underline{d} = \underline{0}$

Mehrere rechte Seiten: $A X = B \implies A\,\underline{x}_j = \underline{b}_j$

Inverse:

$A X = E \;\Rightarrow\; A^{-1} = X$

A **regulär** $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Singulärer Fall:

	Spezielle Lösung	$A\,\hat{\underline{x}} = \underline{b}$	**des homogenen LGS**
+	**Allgemeine Lösung**	$A\,\underline{z} = \underline{0}$	**des inhomogenen LGS**
=	**Allgemeine Lösung**	$A\,(\hat{\underline{x}} + \underline{z}) = \underline{0}$	**des homogenen LGS**

Determinante

Definition :

$n = 1: \ \det(A) := a_1$

$n > 1: \ \det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1\,i} \det(A_{1\,i})$

Eigenschaften :

$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \det(0) = 0 \qquad \det(\tilde{E}) = 1$

A regulär $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \qquad$ A singulär $\Longleftrightarrow \det(A) = 0$

Effektive Berechnung einer Determinante :

Umwandlung der Matrix in Zeilen – Stufenform. Hierbei ist

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii})$$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ antisymmetrisch und n ungerade $\Rightarrow \det A = 0$

Eigenwert – und Eigenvektorproblem

Gesucht : λ, $\underline{q}$ so daß $(A - \lambda E)\,\underline{q} = \underline{0}$

Charakteristisches Polynom : $\chi_A := \det(A - \lambda E)$

Eigenvektorraum zu Eigenwert $\lambda_{i: V(\lambda_i)} := \mathrm{Kern}\,(A - \lambda_i E)$

Eigenwert bei symmetrischen Matrizen :

1. Alle Eigenwerte sind reell.
2. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthonormal.
3. Die algebräische Vielfachheit von Eigenwerten (wieoft ein EW eine Nullstelle ist) ist gleich der geometrischen (Anzahl der Eigenvektoren).

1. Besitzt A den Eigenvektor $\underline{b}$ zum Eigenwert λ, dann haben αA, A^m, $A + \beta E$ und $\alpha_m A^m + ... + \alpha_1 A^1 + \alpha_0$ den gleichen Eigenvektor, aber zu einem anderem Eigenwert $\alpha\lambda$, λ^m, $\lambda + \beta$ und $\alpha_m \lambda^m + ... + \alpha_1 \lambda^1 + \alpha_0$.
2. A und A^T haben diegleichen Eigenwerte, aber andere Eigenvektorräume.
3. Die ähnlichen Matrizen A und B^{-1} AB haben die gleichen Eigenwerte. $\underline{b}$ ist genau dann Eigenvektor von A, wenn $B^{-1}\,\underline{b}$ Eigenvektor von B^{-1} AB ist.
4. A ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte ungleich null sind.
5. A und A^{-1} haben diegleichen Eigenwerte und – vektoren.
6. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
7. Sei $B := (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)$ aus den Eigenvektoren von A gebaut. Dann gilt : $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots (, \lambda)_n) = B^{-1} AB$, falls $AA^T = A^T A$.
8. $A^k = BD^k B^{-1}$
9. $\lambda_{min} \leq \dfrac{x^T Ax}{|x|^2} \leq \lambda_{max}$

Quadratische Form, Hauptachsentransformation

Quadratische Form : $\underline{q}(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$

Falls A in diagonalform, ist $\underline{q}$ rein quadratisch. $\underline{q}(\underline{x}) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2$

$\lambda_{min} |x|^2 \leq \underline{q}(\underline{x}) \leq \lambda_{max} |x|^2$

Hauptachsentransformation :

$B^T AB = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ... (, \lambda)_n) \wedge \underline{q}(\underline{x}) = \underline{q}(B\,\underline{y}) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$

Positiv definit : $\underline{x} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{q}(\underline{x}) > 0$ **Negativ definit :** $\underline{x} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{q}(\underline{x}) < 0$

Ansonsten indefinit. Bei semidefiniten Fällen gilt auch gleich.

$A = A^T$ **positiv definit** $\Longleftrightarrow \exists\, W \epsilon \mathbb{R}^{n,n}$. **W invertierbar und** $W^T AW$ **positiv definit.**

$A = A^T$ **positiv definit** $\Longleftrightarrow$ **Alle EV von A positiv**

$A = A^T$ **positiv definit** $\Longrightarrow \forall\, i.\, a_{ii} > 0$

A positiv definit $\Longrightarrow A = LL^T$ **mit L invertierbarer, unterer Dreiecksmatrix**

$A = A^T \epsilon \mathbb{R}^{2,2}$ **positiv definit** $\Leftrightarrow a_{11} > 0 \wedge \det A > 0$

$A = A^T \epsilon \mathbb{R}^{3,3}$ **positiv definit** $\Leftrightarrow a_{11} > 0 \wedge \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge \det A > 0$

Allgemeines

Lineare Unabhängikeit :

$$\underline{z} = \sum_{i=1}^{m} \underline{x}_i \lambda_i = \underline{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 =. .. = \lambda_m = 0$$

Vektorraum : $V = \{A\,\underline{x} \mid \underline{x} \epsilon \mathbb{R}\}$

Kriterium für Vektrorraum :

(I) $\underline{x}, \underline{y} \epsilon\, m \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \epsilon\, m$ (II) $\underline{x} \epsilon\, m,\ \lambda \epsilon \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\, \underline{x} \epsilon\, m$

Basis von V : Spalten von A, falls diese linear unabhängig

Kern A $= \mathcal{R}_A = \{A\,\underline{x} \mid \underline{x} \epsilon \mathbb{R}^n\}$

Bild A $= \mathcal{N}_A = \{\underline{x} \epsilon \mathbb{R} \mid A\,\underline{x} = 0\}$

Rang A : Anzahl der linear unabhängigen Spalten von A.

Rang A := dim Bild A

dim Bild A + dim Kern A = Rang A + dim Kern A = dim V (mit z.B. : $V := \mathbb{R}^n$)

Rang AB ≤ min {Rang A, Rang B}

A hat Rang n $\Leftrightarrow A^T A$ **regulär.**

<u>Satz :</u> Der Rang bleibt unverändert unter den elementaren Umformungen :

a. Vertauschungen $\underline{a}_i \leftrightarrow \underline{a}_j$

b. Skalieren $\underline{a}_i \longrightarrow \lambda\, \underline{a}_i$

c. Vielfaches von a_i zu a_j. $\underline{a}_j \longrightarrow \underline{a}_j + \lambda\, \underline{a}_i$

Orthogonales Komplement :

$m^\perp := \left\{x \epsilon \mathbb{R} \,\middle|\, x^T y = 0 \wedge \forall\, y \epsilon\, m\right\}$, **<u>Bsp</u> :** $\mathbb{R}^\perp = \{0\}$

Antsymmetrische Matrizen : $A^T = -A$, **Symmetrische :** $A^T = A$

Basiswechsel

Basiswechsel von $E = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ nach $B = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$.

Ohne Ursprungverschiebung: $\underline{x}_B = B^{-1}\,\underline{x} \wedge \underline{x} = B\,\underline{x}_B$

Mit Ursprungswechsel: $\underline{x} = B^{-1}\left(\underline{x} - \underline{p}\right)$ bei um $\underline{p}$ verschobenen Ursprung.

Triviale Vektorgleichungen

Euklidsche Länge / Norm: $\|\underline{x}\| := \sqrt{\underline{x}^T\,\underline{x}}$

Dreiecksungleichung: $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$

$$\|\alpha\,\underline{x}\| = \alpha \cdot \|\underline{x}\|$$

Cauchy – Schwarz: $\left|\underline{x}^T\,\underline{y}\right| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$

Winkel zw. Vektoren: $\cos\varphi = \dfrac{\underline{x}^T\,\underline{y}}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|}$

Orthogonal: $\underline{x}^T\,\underline{y} = 0$

Häufige Aufgabe

$v \in \mathbb{R}^n$ als Linear – kombination von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ darstellen.

$\lambda_i = (\underline{x}_i)^T\,\underline{v}$

mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Orthogonale Zerlegung von $\underline{a}$ langs $\underline{b}$

$\underline{a} = \underline{a}_{\underline{b}} + \underline{a}_{\underline{n}}$ mit $\underline{a}_{\underline{b}} = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2}\,\underline{b}$ und $\underline{a}_{\underline{n}} = \underline{a} - \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2}\,\underline{b}$

Schmidts – Orthogonalisierungsverfahren mit Normierung

Start : $\underline{x}_1 := \dfrac{\underline{y}_1}{\|\underline{y}_1\|}$

Für $k = 2, \ldots, n$:

$\underline{z} := \underline{y}_k$

Für $i = 1, \ldots, k-1$:

$\lambda := (\underline{x}^i)^T \underline{y}_k$

$\underline{z} := \underline{z} - x$

$\varrho := \|z\|$

Falls $\varrho = 0$, dann Vektoren nicht linear unabhängig.

$x_k := \dfrac{z}{\varrho}$

Bemerkung : Für ein ONS gilt $XX^T = E$.

Lineare Abbildungen

$f : m \longrightarrow n$ heißt linear, gdw. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

f injektiv $\Longleftrightarrow$ Kern $f = \{0\}$

f surjektiv $\Longleftrightarrow$ Bild $A = \mathbb{R}^N$

f biijektiv $\Longleftrightarrow$ Rang $A = m = n$

Spiegelungen und Drehungen in $\mathbb{R}^2$

Drehung :

$$Q(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$Q(\vartheta)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi+\vartheta) \\ r\cdot\sin(\varphi+\vartheta) \end{pmatrix}$$

Spiegelung :

$$S(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$S(\vartheta)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\vartheta-\varphi) \\ r\cdot\sin(\vartheta-\varphi) \end{pmatrix}$$

mit $r := \sqrt{x^2+y^2}$ und $\varphi := \arccos\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$Q(\vartheta_1)\cdot Q(\vartheta_2) = Q(\vartheta_1+\vartheta_2)$ Alle Drehungen sind kommutativ!

Drehung in der Ebene : $\underline{d}(\underline{x}) = \cos\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \sin\varphi\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Drehung im Raum : $\underline{d}(\underline{x}) = \cos\varphi\,\underline{x} + (1-\cos\varphi)\dfrac{\underline{x}\cdot\underline{a}}{|\underline{a}|^2}\,\underline{a} + \dfrac{\sin\varphi}{|\underline{a}|}\,\underline{a}\times\underline{x}$

($\underline{a}$ ist Drehachse). D ist Drehmatrix $\Leftrightarrow D^T D = E \wedge \det D = 1$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\text{Spur } D - 1)$$

$$\underline{a} = \frac{1}{2\sin\varphi}\begin{pmatrix} d_{32}-d_{23} \\ d_{13}-d_{31} \\ d_{21}-d_{12} \end{pmatrix} \text{ falls } \varphi \neq \pi \text{ oder } (D-E)\,\underline{a} = \underline{0}$$

Spiegelung an der Ebene $\underline{a}\cdot \underbrace{x}_{=:\,\underline{s}(\underline{x})} = \underline{x} - 2(\underline{a}\cdot\underline{x})\,\underline{a}$

Gleichung für die Ebene E durch 3 Punkte

$$E = \{\underline{p} + \lambda\underline{a} + \mu\underline{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$E = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{n}^T(\underline{x}-\underline{p}) = 0\}$$

mit unnormiert als $\underline{n} := \underline{a}\times\underline{b}$ und normiert $\underline{n} := \dfrac{\underline{a}\times\underline{b}}{\|\underline{a}\times\underline{b}\|}$.

Standardprobleme

Im Folgenden sei : $G_1 = \{\underline{a}+\lambda\underline{b} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$, $G_2 = \{\underline{c}+\mu\underline{d} \mid \mu\in\mathbb{R}\}$,

$E_1 = \{\underline{p} + \lambda\underline{r} + \mu\underline{s} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{\underline{v} + \lambda\underline{y} + \mu\underline{z} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

bzw.(: $E)_1 = \{(\underline{x}-\underline{p})\times\underline{n}_1 \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^3\}$, $E_2 = \{(\underline{x}-\underline{v})\times\underline{n}_2 \mid \underline{v} \in \mathbb{R}^3\}$

1. Winkel zwischen Ebenen $\Leftrightarrow$ Winkel zwischen den Normalen

$$\cos\varphi = \frac{|\underline{n}_1\cdot\underline{n}_2|}{|\underline{n}_1|\cdot|\underline{n}_2|}$$

$|\underline{n}\ \cdot\underline{b}|$

2. Winkel zwischen Ebene E_1 und Gerade G_1: $\sin\varphi = \frac{1}{|\underline{n}_1|\cdot|\underline{b}|}$

3. Sind zwei Geraden paralle : $\underline{b} \times \underline{d} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{b} = \underline{0} \vee \underline{d} = \underline{0} \vee \underline{b}, \underline{d}$ parallel
oder : $\underline{b} = \mu\, \underline{c}$

4. Abstand eines Punktes $\underline{P} \in \mathbb{R}^3$ zu einer Ebene E_1 :

$$d = \frac{|(\underline{p} - \underline{P})\cdot \underline{n}_1|}{|\underline{n}_1|}$$

5. Abstand eines Punktes $\underline{P} \in \mathbb{R}^3$ zu einer Geraden G_1 :

$$d = \frac{|(\underline{a} - \underline{P})\times \underline{b}|}{|\underline{b}|}$$

6. Abstand zwischen Geraden :

Falls $\underline{b}, \underline{d}$ parallel : $d = \frac{|(\underline{c} - \underline{a})\times \underline{b}|}{|\underline{b}|}$

Sonst : $d = \frac{|(\underline{c} - \underline{a})\times \underline{b}\times \underline{d}|}{|\underline{b}\times\underline{d}|} = \frac{\det((\underline{c} - \underline{a}), \underline{b}, \underline{d})}{|\underline{b}\times\underline{d}|}$

7. Schnittgerade :

$$\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{n}_1 \times \underline{n}_2)$$

8. Dreibein mit gegebenen ersten Bein

$a \in \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\|a\| = 1$.
Gesucht ist $Q = (a, b, c)$ mit $|Q| = 1$.
Fall 1 : $|a_1| \le |a_2|, |a_3|$

$$\omega := \sqrt{a_2^2 + a_3^2}, \quad \gamma := \frac{a_2}{\omega}, \quad \sigma := \frac{a_3}{\omega}$$

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & -\omega \\ a_2 & \sigma & a_1\gamma \\ a_3 & \gamma & a_1\sigma \end{pmatrix}$$

Fall 2 : Für i gelte $|a_i| \le |a_j|, |a_k|$
i, j, k gerade Permutation von 1, 2, 3.
$i := 1, j := 2, k := 3$.
Falls $|a_2| \le |a_3|$ dann

Falls $|a_1| > |a_2|$, dann $i := 2, j := 3, k := 1$.
sonst :
Falls $|a_1| > |a_3|$,
dann $i := 3, j := 1, k := 2$.

$$\omega := \sqrt{a_j^2 + a_k^2}, \quad \gamma := \frac{a_j}{\omega}, \quad \sigma := \frac{a_k}{\omega}$$

$b_i := 0 \quad b_j := 0 \quad b_k := -\gamma$
$c_i := -\omega \quad c_j := a_j\gamma \quad c_k := a_j\sigma$

Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten : $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Polarkoordinaten : $\varrho := \sqrt{x^2+y^2}$ und $\varphi :=$ arc (x, y), z wird übernommen

$x = \varrho \cos\varphi$ und $y = \varrho \sin\varphi$

Kugelkordinaten

$r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi = \text{arc}(x, y)$, $\vartheta = \text{arc}\left(z, \sqrt{x^2+y^2}\right)$

$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi \sin\vartheta$ und $z = r \cos\vartheta$

Gedrehte Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ mit det Q = +1 und Q orthogonal.

Drehung um die z – Achse :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehung um die y – Achse :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Drehung um die x – Achse :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Diverses

$$\text{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)^{-1}$$

A, $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ ähnlich $\Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}^{n,n}$, B invertierbar. $C = B^{-1} AB$.

Analysis

Intervallschachtelung

Es sein $[a_n, b_n]$ eine Folge mit n = 1, 2, 3, ...

(I) $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le b_3 \le b_2 \le b_1$

(II) $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$

oder äquivalent : $\forall \varepsilon > 0.\ \exists n_0.\ \forall n \ge n_0.\ b_n - a_n \le \varepsilon$

Vollständigkeitsaxiom : Zu jeder Intervallschachtelung gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, welches allen Intervallen angehört : $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\} \neq \{\}$

Folgen

Folge ist $(a_k)_{k=1}^{\infty}$

Beschränkt : $\forall\, n.\, a_n \leq c$

Nullfolge : (a_n) **heißt Nullfolge, wenn** $\forall\, \varepsilon > 0.\, \exists\, N(\varepsilon).\forall\, n \geq N(\varepsilon).\ |\, a_n \,| < \varepsilon$

Konvergenz : (a_n) **konvergiert gegen g, wenn** $(a_n - g)$ **Nullfolge.**

(Also wenn : $\forall\, \varepsilon > 0.\, \exists\, N(\varepsilon).\forall\, n \geq N(\varepsilon).\ |\, a_n - g \,| < \varepsilon$**)**

Sätze für konvergente Folgen :

- **Bei Addition (Subtraktion, Multiplikation, Division) von Folgen ist der Grenzwert auch die Summe (Differenz, Produkt, Quotient) der Grenzwerte.**
- **Konvergente Folgen sind beschränkt.**
- **Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungswert (Bolzano – Weierstraß)**
- **Jede beschränkte Folge hat einen größten und einen kleinsten Häufungswert**
- **Eine Folge mit genau einem Häufungswert ist konvergent.**

Konvergenzkriterium von Cauchy

Eine Folge (a_n) **konvergiert genau, dann wenn**

$$\forall\, \varepsilon > 0.\, \exists\, N(\varepsilon).\forall\, n, m \geq N(\varepsilon).\ |\, a_n - a_m \,| < \varepsilon$$

Endliche Reihen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \wedge \quad \sum_{k=p}^{q} k = \frac{1}{2}(p+q)(q-p+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1) \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{n} 2k = n^2 \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{n} (2k-1) = n(n+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n^2 \left(4n^2 - 1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{2} n^2 (n+1)^2 \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{n} (2k-1)^3 = n^2 \left(2n^2 - 1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)\left(30n^2 + 3n - 1\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + n \cdot x^{n+1}}{(1-x)^2} \qquad \text{mit } x \neq 1$$

Unendliche Reihen

Geometrische Reihe : $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \longrightarrow \frac{1}{1-x}$ **mit** $\left|x\right| < 1$ **fest.**

Harmonische Reihe : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ **divergent.**

Riemannsche Zeta – Funktion : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^x} = : \varrho(x)$ **mit** $x \in \mathbb{R}$ **und** $x > 1$.

Alle Aussagen über Folgen lassen sich auf Reihen übertragen.

Absolute Konvergenz :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent, wenn** $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n\right|$ **konvergent.**

Majorantenkriterium :

$\left|a_n\right| (\leq c)_n$ **und** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ **konvergent** $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent.**

Leibnizkriterium :

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ **und** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ **konvergent.**

Wurzelkriterium :

$q < 1 \wedge \forall\, n \geq n_{0.} \sqrt[n]{|\, a_n \,|} \leq q \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent.**

Quotientenkriterium

$q < 1 \wedge \forall\, n \geq n_{0.} \frac{|\, a_{n+1} \,|}{|\, a_n \,|} \leq q \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent.**

Umordnungssatz :

Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert ebenfalls und hat dengleichen Grenzwert. Wenn die Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent, kann man durch umstellen ihrer Glieder jeden Grenzwert erreichen, auch $\pm\infty$.

Wichtige unendliche Reihen

Exponentialfunktionen

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad a^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \cdot \ln a)^n}{n!}$$

Logarithmusfunktion

$$\ln(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n} \quad \text{(Konvergiert nur bei } 0 < x \leq 2\text{)}$$

$$\ln(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n \cdot x^n} \quad \left(\text{Konvergiert nur bei } \frac{1}{2} < x\right)$$

$$\ln(x) := 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} \quad \text{bei } x > 0$$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Inverse trigonometrische Funktionen

$$\arcsin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)\,(2n+1)} \quad \text{(Konvergiert nur bei } x < 1\text{)}$$

$$\arccos x := \frac{\pi}{2} - \arcsin x \qquad \arctan x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Hyperbelfunktionen

$$\sinh x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cosh x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Areafunktionen

$$\operatorname{Arsin} x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)\,(2n+1)} \quad \text{(Konvergiert nur bei } |x| < 1\text{)}$$

$$\operatorname{Arcos} x := \pm\left[\ln(2x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n) \cdot x^{2n}}\right. \quad \text{(Konv. nur bei } x > 1\text{)}$$

$$\operatorname{Artan} x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{(Konvergiert nur bei } |x| < 1\text{)}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \wedge \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k \quad \wedge \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\, x^k$$

Doppelfolgen und Reihen

Diagonal – oder Standardweg : $\sum_{k=0}^{\infty} D_k =$ mit $D_k = \sum_{l=0}^{k} a_{l,k-l}$

Zeilenweise : $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i =$ mit $Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$

Spaltenweise : $\sum_{j=0}^{\infty} S_j =$ mit $S_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$

Großer Umordnungssatz :

Falls $\exists\, \sigma.\ \forall\ m, n.\ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \leq \sigma$ **gilt, dann gilt auch**

$$\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} S_j = \sum_{k=0}^{\infty} D_k = \sum_{\text{bel.Weg}} a_{ij}$$

Cauchy – Produkt : Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **absolut konvergent, dann**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} D_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} b_l\, a_{k-l} \qquad \left(D_k = \sum_{l=0}^{k} b_l\, a_{k-l}\right)$$

Potenzreihen

$$f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-a)^j$$

Konvergenzgebiet $\mathcal{H}$ **:** $\{0\} \subset \mathcal{H} \subset \mathbb{C}$

Konvergenzscheibe / Intervall : $U_r(a) = \{x \in \mathcal{H} \mid |x-a| < r\}$

Lemma : f konvergent für $z_0 \neq 0 \Longrightarrow$ **Konvergenz für** $\forall$ **z mit** $|z| < z_0.$

Satz von Hadamard :

$$r = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ divergent} \\ \infty & \text{falls } \sqrt[n]{|a_n|} \text{ eine Nullfolge} \\ \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Falls $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, **dann gilt** $r = \infty$

Funktionen einer Variable

Stetigkeit in Punkt $\hat{x}$:

1. Definition : $\forall\, \varepsilon > 0.\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0.\ \forall\, x \in \mathbb{R}.\ |x - \hat{x}| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - \hat{y}| < \varepsilon$

2. Definition : (1) $\hat{x} \in D$. (2) $\lim_{x \to \hat{x}} f(x) = f(\hat{x}) = \hat{y}$

f stetig auf $[a, b] \Leftrightarrow \forall x \in [a, b].\ f(x)$ **stetig**

Jede Potenzreihe ist stetig auf ihrem Konvergenzgebiet.

Zwischenwertsatz : Eine stetige Funktion nimmt auf einem Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Schrankensatz : Eine stetige Funktion ist auf Intervall $[a, b]$ überall beschränkt. Eine stetige Funktion nimmt auf $[a, b]$ ihr Maximum und ihr Minimum an.

Gleichmäßige Stetigkeit :

$\forall\, \varepsilon > 0.\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0.\ \forall\, \hat{x}, x \in \mathbb{R}.\ |x - \hat{x}| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon$

Grenzwerte

$$\forall\, \alpha > 0.\ \frac{x^{\gamma}}{e^{\alpha x}} = x^{\gamma} \cdot e^{-\alpha x} \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow \infty$$

$$\forall\, \alpha > 0.\ \frac{\ln y}{y^{\alpha}} \longrightarrow 0 \text{ für } y \longrightarrow \infty$$

$$\forall\, \alpha > 0.\ x^{\alpha} \ln x \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow 0$$

Wenn $f(\hat{x}) = g(\hat{x}) = 0$ **oder** $f(\hat{x}) = g(\hat{x}) = \infty$, **dann**

$$\lim_{x \to \hat{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \hat{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(L'Hospital)}$$

Differentialrechnung

$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + h \cdot f'(\hat{x}) + h \cdot R(\hat{x}, h)$

$f'(x) = \lim \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

f, g seinen im folgenden stetig und differenzierbar auf (a, b).

Satz von Rolle: $f(a) = f(b) = 0 \Longrightarrow \exists\, \xi \in (a, b).\ f'(\xi) = 0.$

f hat n Nullstellen $\Longrightarrow$ f' hat n − 1 Nullstellen

Eine Nullstelle von f an ξ ist m − fach, wenn

$$f(\xi) = f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(m-1)}(\xi) = 0 \text{ und } f^{(m)}(\xi) \neq 0.$$

Mittelwertsatz:

$$\exists\, \xi \in (a, b).\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz: (Bedingung $\forall\, x \in (a, b).\ g(x) \neq 0$)

$$\exists\, \xi \in (a, b).\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Minimum: $f'(x) = 0 \ \wedge\ f''(x) > 0$ **Konkav:** $f''(x) < 0$

Maximum: $f'(x) = 0 \ \wedge\ f''(x) < 0$ **Konvex:** $f''(x) > 0$

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \ \wedge\ f'''(x) \neq 0$

Elementare Regeln zum Differenzieren

$$\frac{d}{dx}(c \cdot y + C) = c \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(u(x) \pm v(x)) = \frac{du}{dx}(x) + \frac{dv}{dx}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) = u(x) \cdot \frac{dv}{dx}(x) + \frac{du}{dx}(x) \cdot v(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{\frac{du}{dx}(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \frac{dv}{dx}(x)}{v(x)^2}$$

$$\frac{du(v(x))}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = u'(v(x)) \cdot v'(x) \qquad \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Regeln zum Differenzieren

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1} \qquad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \qquad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \qquad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \qquad \frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} u(x)^{v(x)} = u(x)^{v(x)} \left(\frac{u'(x) \cdot v(x)}{u(x)} + v'(x) \cdot \ln u(x) \right) \qquad \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Die Ableitung einer Potenzreihe erhält man durch gliedweise Differentation.

Taylor – Reihe

Version 1 :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + f'(x_0) \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots + f^{(m-1)}(x_0) \cdot \frac{h^{(m-1)}}{(m-1)!} + R_m(x_0, h)$$

Restglied : $R_m(x_0, h) = f^{(m)}(x_0 + \vartheta h) \cdot \frac{h^m}{m!}$ **mit** $\vartheta \in [0, 1]$

Version 2 :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f'(a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(a) \cdot \frac{(x-a)^{(n-1)}}{(m-1)!} + R_{n+1}(x)$$

Restglied : $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-a)^n}{(n+1)!}$ **mit** $\xi \in [a, x]$

Lemma : Jede auf einem offenen Interval I $(n+1)$ – mal differenzierbare Funktion ist ein Polynom vom Grad $\leq$ n.

Newton – Verfahren

Start $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Horner Schema und Polynomdivision

Sei $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ und $b \in \mathbb{R}$.
Für $c_n := a_n$, $c_{n-1} := c_n b + a_{n-1}$, $c_{n-2} := c_{n-1} b + a_{n-2}$, ... (, $c)_0 := c_1 b + a_0$ gilt
$c_0 = f(b)$ und $f(x) = (x-b)\left(c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + c_{n-2} x^{n-3} + c_1\right) + f(b)$

Schema :

		a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_{n-3}	...	a_1	a_0
+	0	$a_n \cdot b$	$c_{n-1} \cdot b$	$c_{n-2} \cdot b$	...	c_2	c_1		
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}		c_1	c_0		

Horner Schema in n – maliger Anwendung auch zum Reihenerstellen anwendbar.

Partialbruchzerlegung

Gegeben : $\frac{r(x)}{q(x)}$

1. Schritt : Falls Grad r > Grad q, Polynomdivision : $\frac{r(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$

2. Schritt : Produktdarstellung

$$q(x) = c\,(x-b_1)^{k_1} (x-b_2)^{k_2} \cdots (x-b_n)^{k_n} \cdot Q(x)^m$$

3. Schritt : Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k_1} \frac{A_1}{(x-b_1)^k} + \sum_{k=1}^{k_2} \frac{A_2}{(x-b_2)^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{k_n} \frac{A_n}{(x-b_n)^k} + \sum_{l=1}^{m} \frac{B_l\, x + C_l}{Q(x)^l}$$

4. Schritt : Bestimmung der A_i, B_i und C_i.

<u>Koeffizientenvergleich</u> : Umformung, so daß die Polynome

$$f(x) \cdot p(x) = q(x)$$

sich gegenüber stehen und die Koeffizienten dann gleich sein müssen.

<u>Einsetzmethode</u> : Multiplikation mit $(x-b_j)^{k_j}$ und einsetzen $x = b_j$.

Integralrechnung

Integrierbar

- beschränkte, monotone Funktionen
- stetige Funktionen
- Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeiten
- stückweise monotone Funktionen
- f, g integrierbar $\Rightarrow$ $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ integrierbar und falls $g \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ integrierbar.
- $f_+ := \max(f(x), 0)$, $f_- := \min(f(x), 0)$ und $f_+ - f_-$ integrierbar
- f integrierbar auf $[a, b]$ $\Rightarrow$ f integrierbar auf $[c, d] \subseteq [a, b]$.

Geometrische Interpretation: Fläche unter der Kurve.

Eigenschaften: Linearität, Monotonie

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \;\wedge\; \int_a^a f(x)\,dx = 0 \;\wedge\; \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$f(x) \leq |f(x)| \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \;\wedge\; \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Mittelwertsatz: Sei f stetig auf $[a, b]$.

$$\exists\, \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Erweiterter Mittelwertsatz: f stetig auf $[a, b]$ und g integrierbar auf $[a, b]$ und ≥ 0.

Dann gilt: $\exists\, \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

Hauptsatz der Infinitisimalrechnung

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $c \in [a, b]$ fest. Dann ist:

$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt$ differenzierbar und $\frac{dF}{dt}(x) = f(x)$.

Die Stammfunktion F ist bis auf eine Konstante eindeutig

Integration durch Substitution

$\int R\left(x;\ \sqrt[n]{ax+b}\right)dx \quad \to$ **Substitution von** $t^n = ax+b$

$\int R\left(x;\ \sqrt[n]{ax^m+b}\right)dx \quad \to$ **Substitution von** $t^n = x^m+b$

$\int R\left(x;\ \sqrt[n]{a^2-x^2}\right)dx \quad \to$ **Substitution von** $x = a \cdot \sin t$

$\int R\left(x;\ \sqrt[n]{a^2+x^2}\right)dx \quad \to$ **Substitution von** $x = a \cdot \tan t$

$\int R(e^x)\,dx \quad \to$ **Substitution von** $t = e^x,\ x = \ln\ t,\ dx = \frac{dt}{t}$

$\int R(\tan x)\,dx \quad \to$ **Substitution von** $t = \tan x,\ x = \arctan\ t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$\int R(\sin x;\ \cos x)\,dx \quad \to$ **Substitution von** $t = \tan \frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$\int R(\sin x;\ \cos x)\,dx \quad \to$ **Substitution von** $t = \tan x,\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$\int R\left(x;\ \sqrt{x^2-a^2}\right)dx \quad \to$ **Substitution von** $x = a \cdot \cosh t,\ t = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|$

$\int R\left(x;\ \sqrt{x^2+a^2}\right)dx \quad \to$ **Substitution von** $x = a \cdot \sinh t,\ t = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$

$\int R\left(x;\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx \quad \to$ **Substitution von** $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}},\ x = \frac{et^k-b}{a-ct^k},$

$$dx = k\,(ae-bc)\,\frac{t^{k-1}}{(a-ct^k)^2}\,dt$$

Regeln zum Integrieren

Partielle Integration: $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$

Substitution: $\varphi(t)$ streng monoton und differenzierbar, dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \text{ mit } \varphi(\alpha) = a \text{ und } \varphi(\beta) = b.$$

Allgemeine Vorgehensweise:

1. Wähle $\varphi(t)$
2. Berechne α, β $\left(\alpha := \varphi^{-1},\ \beta := \varphi^{-1}(b)\right)$
3. Setze $x = \varphi(t)$ in f ein: $f(\varphi(t))$
4. Setze $dx = \varphi'(t)\,dt$ ein.

Die Stammfunktion einer Potenzreihe erhält man durch gliedweise Integration.

Wichtige Integrale:

$$\int \frac{dx}{x-\lambda} = \ln|x-\lambda| + C \qquad \wedge \qquad \int \frac{dx}{(x-\lambda)^k} = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-\lambda)^{k-1}} + C$$

Spezialfälle:

Zwei reelle Nst.: $\int \frac{1}{x_0-x_1}\left(\frac{1}{x-x_0} - \frac{1}{x-x_1}\right)dx = \frac{1}{x_0-x_1}\ln\left|\frac{x-x_0}{x-x_1}\right| + C$

Doppelte reelle Nst.: $\int \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \frac{A_1}{x-x_0}\,dx = -\frac{A_2}{x-x_0} + A_1\ln\left|x-x_0\right| + C$

Sei $q(x) := ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ und $D := b^2 - 4ac$

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{|D|}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{|D|}}\right) & \text{falls } D < 0 \\ -\frac{2}{2ax+b} & \text{falls } D = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|D|}}\ln\left(\frac{2ax+b-\sqrt{|D|}}{2ax+b+\sqrt{|D|}}\right) & \text{falls } D > 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{Ax+B}{q(x)}\,dx = \frac{A}{2a}\ln\left|q(x)\right| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{q(x)}$$

$$\int \frac{dx}{q(x)^n} = \frac{\frac{2ax+b}{q(x)^{n-1}} + (4n-6)a\cdot\int\frac{dx}{q(x)^{n-1}}}{(n-1)(4ac-b^2)} \text{ für } n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\int \frac{Ax+B}{q(x)^n}\,dx = \frac{A}{2(1-n)a}\cdot\frac{1}{q(x)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{q(x)^n} \text{ für } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Wichtige Integrale

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad\wedge\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \quad\wedge\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \quad\wedge\quad \int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \quad\wedge\quad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \quad\wedge\quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \quad\wedge\quad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C \quad\wedge\quad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C \quad\wedge\quad \int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C = \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad\wedge\quad \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad\wedge\quad \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$$

Sei p ein Polynom mit Grad $p = n$

$$\int p(x)\,e^{ax}\,dx = \left(\frac{1}{a}p(x) - \frac{1}{a^2}p'(x) + \frac{1}{a^3}p''(x) \pm \ldots + \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}p^{(n)}(x)\right)\cdot e^{ax}$$

Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \quad \wedge \quad \int_\infty^b f(x)\,dx := \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$$

Bei unendlich langen Integrationsintervall:

1. Ersetze die untere Grenze $-\infty$ durch a und die obere Grenze $+\infty$ durch b.

2. Berechne die Stammfunktion F und $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

3. Studiere F (a) für $a \to -\infty$ und F (b) für $b \to +\infty$. Diese beiden Grenzwerte existieren garantiert, wenn $|f(x)| \leq \frac{c}{|x|^\gamma}$ mit $\gamma > 1$ (hinr.aber nicht notw.).

Bei unbeschränktem Integranden:

1. Finde alle Singularitäten in [a, b]. Prüfe f (a), f (b) und f (x) mit $x \in (a, b)$.

2. Zerlege [a, b] an den gefundenen Singularitäten von f. Bearbeite jedes Teilintervall [a', b'] für sich.

3. Berechne die Stammfunktion F und $\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx = F(b' - \varepsilon) - F(a' + \varepsilon)$

4. Studiere $F(b' - \varepsilon)$ und $F(a' + \varepsilon)$ für $\varepsilon \longrightarrow +0$.

Ein weiterer Satz:

Falls f auf (a, b) stetig ist und falls

$|f(x)| \leq \frac{c_1}{(x-a)^\gamma}$ für $x \longrightarrow a + 0$, festes $\gamma < 1$ und $|f(x)| \leq \frac{c_2}{(b-x)^\gamma}$ für $x \longrightarrow b - 0$, festes $\gamma < 1$, dann existiert $\int_a^b f(x)\,dx$

Einige uneigentliche Intergrale

(1) $\int_0^\infty e^{-x}\, x^n\, dx = n!$ (2) $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (3) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt = \frac{\pi^2}{6}$

(4) $\int_0^\infty \frac{x}{e^{\lambda x} - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{6\,\lambda^2}$ (5) $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(\omega x)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4}$

(5) $\int_0^\infty \frac{\sin(\omega x)}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{falls } \omega > 0 \\ 0 & \text{falls } \omega = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } \omega < 0 \end{cases}$ (Integraldarstellung der Sprungfunktion)

(6) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (7) $\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Allgemeines zu Differentialgleichungen

Ordnung der DGL : Höchste Ordnung der Ableitungen
Grad der DGL : Grad der höchsten Potenz
Allgemeine Lösung einer DGL n – ter Ordnung hat n freie Parameter.
Partikuläre oder spezielle Lösung : Lösung der DGL, die n vorgegebene Bedingungen erfüllt.
Lineare DGLs : DGLs 1. Grades.
Anfangswertproblem : DGL und Anfangsbedingungen AB : $y(t_0) = y_0$

DGL und AB haben immer eine eindeutige Lösung!

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Ordnung

Form : $F(x, y, y') = 0$

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Longleftrightarrow g(y)\,dy = f(x)\,dx \Longleftrightarrow \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

Gleichgradige Differentialgleichungen 1. Ordnung :

$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ **wobei der Grad von $g(x, y)$ und $f(x, y)$ hinsichtlich der Variablen gleich ist. Dann Substitution von $z := \frac{y}{x}$ und Trennung der Variablen.**

Lineare Differentialgleichungen

1. Ordnung

Normalform : $y' + y \cdot a(x) = b(x)$, $b(x)$ heißt Störfunktion.

Homogene Differentialgleichung : $b(x) = 0$

$y = C \cdot e^{-\int a(x)\,dx}$.

Inhomogene Differentialgleichung : $b(x) \neq 0$

Integration durch Substitution :

Lösungsformel : $y = \frac{1}{A(x)} \left(\int A(x)\,b(x)\,dx + C \right)$ **mit** $A(x) = e^{\int a(x)\,dx}$

Integration durch Variation der Konstanten :

Lösung der homogen DGL bestimmen : $y_H(x)$

$$y = \psi(x) \cdot y_H(x) \quad \text{mit} \quad \psi(x) = \int \frac{b(x)}{y_H(x)}\,dx$$

Integration bekannter partikulärer Lösung y_P :

Lösung der homogen DGL bestimmen : $y_H(x)$, dann :

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

Sind zwei partikuläre Lösungen $y_{P_1}(x)$, $y_{P_2}(x)$ bekannt, dann gilt :

$$y(x) = y_{P_1}(x) + C\left(y_{P_2}(x) - y_{P_1}(x)\right)$$

Diese Sätze gelten allgemein für lineare DGLs beliebiger Ordnung.

Totale (exakte) Differentialgleichungen

Form : $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$

Bedingung : $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$

Unmittelbare Intergration :

$$\int P(x, y)\,dx + \int \left[Q(x, y) - \int \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx\right] dy = C$$

oder

$$\int Q(x, y)\,dx + \int \left[P(x, y) - \int \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\,dy\right] dx = C$$

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Normalform : $y'' + a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y(x) = b(x)$, **$b(x)$ heißt Störfunktion.**

<u>Homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten :</u>

$b(x) = 0$, a_1, a_0 **konstant.**

Nullstellen des Charakteristischen Polynoms : $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

Allgemeine Lösung :

Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $y = C_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x} + C_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x}$

Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $y = (C_1\cdot x + C_2)\cdot e^{\lambda\cdot x}$

Fall $\lambda = \alpha \pm i\beta$: $y = (C_1\cdot\cos\beta x + C_2\cdot\sin\beta x)\cdot e^{\alpha\cdot x} = R\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin(\beta x + \varphi)$

<u>Homogene Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten :</u>

Zu ihrer Lösung muß ein partikuläres Integral y_p gefunden werden.

Lösungsansatz : $y = y_p\, z$

Mit Substitution $z' = u$ entsteht eine DGL 1. Ordnung.

<u>Inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten :</u>

BILD : Bartsch S .458

Rechte Seiten für lineare Differentialgleichungen

Bild Rade / Westergren!!!

Lineare Differentialgleichungen n.Ordnung

DGL : $\dot{\underline{y}}(x) = A\,\underline{y}(x) + b(x)$

Homogene Differentialgleichung : $\underline{b}(x) = 0$

$$\underline{y}(x) = e^{Ax}\cdot \underline{y}_0 \text{ mit } e^{Ax} := E + A\frac{x}{1!} + A^2\frac{x^2}{2!} + A^3\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Inhomogene Differentialgleichung : $\underline{b}(x) \neq 0$

$$y(x) = e^{Ax}\int e^{-Ax}\cdot b(x)\,dx$$

Lösung des Anfangswertproblemes : DGL und AB $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$

$$y(x) = e^{Ax}\left(\underline{y}_0 + \int e^{-Ax}\cdot b(x)\,dx\right)$$

Effektive Berechnung von e^{Ax} für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

Schritt 1 : Charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \det(\lambda E - A)$

Schritt 2 : Berechnung der Nullstellen $\lambda,\ \mu$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(a + d + \sqrt{(a-b)^2 + 4bc}\right) \text{ und } \mu = \frac{1}{2}\left(a + d - \sqrt{(a-b)^2 + 4bc}\right)$$

Probe : $\lambda + \mu = a + d$ und $\lambda\cdot\mu = ad - bc = \det A$

Schritt 3 : Setze $\omega := \lambda - \mu = \sqrt{(a-b)^2 + 4bc}$, dann

$$e^{At} = \frac{1}{\omega}e^{\lambda t}(A - \mu E) + \frac{1}{\omega}e^{\mu t}(\lambda E - A),\ \text{falls } \omega \neq 0 \text{ (d.h. } \lambda \neq \mu).$$

$$e^{At} = e^{2t}(E + (A - \lambda E)t),\ \text{falls } \omega = 0,\ \text{d.h. } \lambda = \mu$$

Für $n > 2$ wird zurücktransformiert :

$$\underline{z}(x) = X^{-1}\,\underline{y}(x)$$

mit nicht – singulärer Matrix $X \in \mathbb{C}^{n,n}$ von x unabhängig. Hierbei ist X aus den linear unabhängigen Eigenvektoren gebaut.

$$\underline{z'}(x) = X^{-1}\,\underline{y'}(x) = \underbrace{X^{-1}AX}_{\Lambda}\cdot\underline{z}(x) + X^{-1}b$$

Finde X, so daß : $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1,\ \ldots (,\ \lambda)_n)$

$$AX = X\Lambda \quad\Leftrightarrow\quad A\,\underline{x}_i = \lambda_i\,\underline{x}_i$$

Rechte Seiten für lineare Differentialgleichungen

Bild Rade / Westergren!!!

Differentialgeometrie – Kurven im $\mathbb{R}^n$

$f: t \longrightarrow \underline{y};\ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Bogenlänge: $L = \int_a^b \| \dot{\underline{x}} \| \, dt$

Tangentenvektor: $\underline{t} = \frac{\dot{\underline{x}}}{|\dot{\underline{x}}|} = \frac{\dot{\underline{x}}}{\nu}$ $\qquad \underline{t} = \underline{x}' = \frac{d\underline{x}}{ds}$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $\underline{n} = \frac{\dot{\underline{t}}}{|\dot{\underline{t}}|} = \frac{\ddot{\underline{x}} - \dot{\nu}\underline{t}}{|\ddot{\underline{x}} - \dot{\nu}\underline{t}|}$ $\qquad \underline{n} = \frac{\underline{r}''}{|\underline{r}''|}$

Binormaleneinheitsvektor: $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$

Krümmung: $\kappa = \frac{|\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}|}{|\dot{\underline{x}}|^3} = \frac{|\dot{\underline{t}}|}{|\dot{\underline{x}}|}$ $\qquad \kappa = |\underline{x}''|$

Krümmungsradius: $r_\kappa = \frac{1}{\kappa}$

Torsion / Windung: $\tau = \frac{\dot{\underline{x}} \cdot (\ddot{\underline{x}} \times \dddot{\underline{x}})}{|\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}|^2}$ $\qquad \tau = \frac{\underline{x}' \cdot (\underline{x}'' \times \underline{x}''')}{|\underline{x}''|^2}$

Torsionsradius: $r_\tau = \frac{1}{\tau}$

Frenet – Formeln:

$\dot{\underline{t}} = \kappa\nu\,\underline{n}, \quad \dot{\underline{n}} = -\kappa\nu\,\underline{t} + \tau\nu\,\underline{b}$ und $\dot{\underline{b}} = -\tau\nu\,\underline{n}$

Falls die Bogenlänge Parameter, dann gilt hier $\nu = 1$

Waagerechte Tangente: $\dot{y} = 0 \wedge \dot{x} \neq 0$

Senkrechte Tangente: $\dot{y} \neq 0 \wedge \dot{x} = 0$

Singuläre Punkte: $\dot{y} = 0 \wedge \dot{x} = 0$

Fläche unter der Kurve: $F = \left| \frac{1}{2} \int x\dot{y} - y\dot{x} \, dt \right|$

Reellwertige Funktionen mehrer Veränderlichen

Beispiel : $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

r – Umgebung : $U_r(\underline{a}) := \{\underline{x} \in \mathbb{R} \mid |\underline{x} - \underline{a}| < r\}$ mit $r > 0$.

Innerer Punkt : a heißt innerer Punkt gdw. $\exists\, r > 0.\ \underline{a} \in U_r(\underline{a})$.

D offen $\Longleftrightarrow (\underline{x} \in D \Leftrightarrow \underline{x}$ innerer Punkt$)$

Rand von D : $\partial D := \left\{\underline{a} \in D \;\middle|\; \forall\, r > 0.\ U_r(\underline{a}) \supset \{\underline{x}, \underline{y}\} \wedge \underline{x} \in D,\ y \notin D\right\}$

D abgeschlossen : $D \supset \partial D$. **D beschränkt :** $\exists\, k > 0.\ \forall\, \underline{x} \in D.\ |\underline{x}| < K$

D abgeschlossen u. beschränkt $\Leftrightarrow$ **D kompakt.**

Stationäre Stelle : $\operatorname{grad} \underline{f} = \underline{0}$

Partielle Ableitung : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ **Gradient :** $\operatorname{grad} f(\underline{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (f')^T$

Satz von Schwarz : $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i x_j}$, falls D offen und $f \in C^2$

Total differenzierbar : $\exists\, \underline{a} \in \mathbb{R}^n.\ f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \underline{a}(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|)$

1. $f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \operatorname{grad} f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|)$
2. f in $\underline{x}_0$ stetig.
3. $D_v f(\underline{x}) = \operatorname{grad} f(\underline{x}) \cdot \underline{v} = \underline{a} \cdot \underline{v} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1}{t}[f(\underline{x} + t\,\underline{v}) - f(\underline{x})]\ \ \forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

Kettenregel : $\dfrac{d}{dt} f(\underline{x}(t)) = \operatorname{grad} f(\underline{x}(t)) \cdot \dot{\underline{x}}(t)$

Richtung von grad f ($\underline{x}$) $\Rightarrow$ **Maximaler Anstieg**

Tayler – Formel :

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + D_v f(\underline{x}) + \frac{1}{2!} D_v^2 f(\underline{x}) + \ldots + \frac{1}{k!} D_v^k f(\underline{x}) + R_k(\underline{x}, \underline{v})$$

$$\text{mit } R_k(\underline{x}, \underline{v}) = \frac{1}{(k-1)!} D_v^{k+1} f(\underline{x} + \xi_k\, \underline{v}) \text{ mit } 0 < \xi_k < 1$$

Implizite Funktion

$f(x, y) = 0 \wedge f(x, g(x)) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ **heißt implizite Funktion**

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \quad \wedge \quad g''(x) = -\frac{1}{f_y}\left(f_{xx} + 2 f_{xy}\, g' + f_{yy}\, g'^2\right)$$

$g'(x) < 0 \Longrightarrow g(x)$ **maximal in x.** $g'(x) > 0 \Longrightarrow g(x)$ **minimal in x.**

$f(x, y) = 0 \wedge f_x(x, y) = 0 \wedge f_y(x, y) \neq 0 \Rightarrow$ **Waagerechte Tangente.**

Spezialitäten

Polarkoordinaten: $F(r, \varphi) = f(r \cdot \cos\varphi,\ r \cdot \sin\varphi)$

$$f_x = F_r \cos\varphi - \frac{1}{r} F_\varphi \sin\varphi, \quad f_y = F_r \sin\varphi + \frac{1}{r} F_\varphi \cos\varphi,$$

$$\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_\varphi$$

Kugelkoordinaten: $F(r, \varphi, \theta) = f(r \cdot \cos\varphi \sin\theta,\ r \cdot \sin\varphi \sin\theta,\ r \cdot \cos\theta)$

$$f_x = F_r \cos\varphi - \frac{1}{r} F_\varphi \sin\varphi, \quad f_y = F_r \sin\varphi + \frac{1}{r} F_\varphi \cos\varphi,$$

$$\Delta f := f_{xx} + f_{yy} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{2}{r} F_r + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} (\cot\theta) F_\theta$$

grad $f(\underline{x}, \underline{y})$ **in** $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ **orthogonal zu** $f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{c}$ **mit** $f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{c}$

Normalengleichung: $f_x(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + f_y(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{y} - \underline{y}_0) = \underline{0}$

(für grad $f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \neq 0$**). Analog im** $\mathbb{R}^{3.}$

Differentation im $\mathbb{R}^n$

Beispiel: $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Total differenzierbar: $\exists A \in \mathbb{R}^{n,m}.\ f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + A(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|)$

Jordan Matrix: $A = J_f(\underline{x}) = ((\text{grad}\, f_1(x))^T, \ldots, (\text{grad}\, f_n(x))^T)$

Kettenregel: $J_{f\circ g}(f(\underline{x})) = J_g(f(\underline{x}))\, J_f(\underline{x}) =$

grad $f = \nabla f = J_f(\underline{x})^T$

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

$$\text{div}\, \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = \text{Spur}\, J_f(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_1} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_2} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_3}$$

$$\text{rot}\, \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \nabla \times \underline{v} \quad \text{und} \quad (\text{rot}\, \underline{v}(\underline{x}_0)) \times (\underline{x} - \underline{x}_0) = (J_{\underline{v}}(\underline{x}_0) - J_{\underline{v}}(\underline{x}_0)^T)(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

$$\text{Hesse-Matrix:}\ H_f(\underline{x}) = (f_{x_i x_j}(\underline{x})) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \ldots & f_{x_1 x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{x_n x_1} & \ldots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

$\underline{a}$ **lokale Extremstelle** $\Longrightarrow$ **grad** $f(\underline{a}) = \underline{0}$

$H_f(\underline{x})$ **positiv definit** $\Longrightarrow$ $\underline{a}$ **ist lokale Minimalstelle**

$H_f(\underline{x})$ **negativ definit** $\Longrightarrow$ $\underline{a}$ **ist lokale Maximalstelle**

$H_f(\underline{x})$ **infinit** $\Longrightarrow$ $\underline{a}$ **ist Sattelpunkt**