Formelsammlung Signaldarstellung

Grundlagen

Einheitsimpuls : $\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Abtastung : $x[t] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_S)\,\delta[t - mT_S] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta[t - mT_S]$

Zeitnormierung : $n = \frac{t}{T_S}$, **Frequenznormierung :** $\Omega = \omega T_S$

Zeitnormiert : $x[n] = x(mT_S) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n]\,\delta[n - m] \qquad = x[n] * \delta[n],\ n \in \mathbb{Z}$

Einheitssprung : $u[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[n - l]$, $u(t) = \int_0^{\infty} \delta(\tau - t)\, d\tau$

Diracsche δ – Funktion : $\delta(t) = \begin{cases} \infty & \forall\, t = 0 \\ 0 & \forall\, t \neq 0 \end{cases} \wedge \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \ \wedge \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t}\, dt$

Impulsdarstellung zeitkontinuierlicher Signale :

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t - \tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, x(t - \tau)\, d\tau = x(t) * \delta(t)$

Lineare Zeitinvariante Systeme (LTI) : Linearität ($T\{ax + by\} = aT\{x\} + bT\{x\}$), Zeitinvarianz ($x(t - \tau) \longrightarrow y(t - \tau)$; $x[n - m] \longrightarrow y[n - m]$)

Zeitkontinuierliche Faltung : $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau = x(t) * \underbrace{h(t)}_{\text{Impulsantwort}}$

Zeitdiskrete Faltung : $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n]\, h[n - m] = x[n] * h[n]$

LTI – Faltung : (a) Kommutativ (b) Assoziativ (c) Distributiv

Stabilität : $\int_{-\infty}^{\infty} \left| h(t - \tau) \right| d\tau < \infty$ bzw. $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| h[l] \right| < \infty$

Kausalität : Ein LTI – System heisst Kausal,
gdw. der Ausgabewert $y(t_0)$ nur von den Eingangswerten $x(t)$ zu Zeiten $t \leq t_0$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau = \int_0^{\infty} x(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]\, h[n - m] = \sum_{m=0}^{\infty} x[n - m]\, h[m]$$

Faltung und Korrelation von Signalen :

Energieübertragung : $E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |\, x(\tau)\,|^2\, d\tau < \infty$

Energiekorrelationsfunktion :

$\varphi_{\mu\nu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\mu(\tau)\, x_\nu(t+\tau)\, d\tau$ **(Autokf. :** $\mu = \nu$**; Kreuzkf. :** $\mu \neq \nu$**)**

$\varphi_{\mu\nu}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_\mu[m]\, x_\nu[n+m]$

Leistungskorrelationsfunktion (nur periodische Signale) :

$\tilde{\varphi}_{\mu\nu}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_\mu(\tau)\, x_\nu(t+\tau)\, d\tau$ **und** $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_\mu[m]\, x_\nu[n+m]$

Pegel : $L_{dB} = 20 \lg \frac{|x(t)|}{|x_0(t)|}\, dB = 10 \lg \frac{|x^2(t)|}{|x_0^2(t)|}\, dB$ **und** $L_{Np} = \ln \frac{|x(t)|}{|x_0(t)|}\, Np$

Orthogonale Funktion : $\int_T \phi_n^*(t)\, \phi_m(t)\, dt = \delta\, K[m-n]$**, bei K = 1 orthonormal.**

Zeitdiskrete Fourierreihe (FR)

Funktionsbeschreibung :

Periodische : $x(t) = x(t + \tau_0)$ **Zeigerdarstellung :** $x(t) = |x(t)|\, e^{\pm j\omega\varphi(t)}$

Phasenwinkel : $\tan\varphi = \mathrm{Im}\{x(t)\} / \mathrm{Re}\{x(t)\}$

Fourierreihe :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},\ c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Reelle Fourierreihe $\left(c_k = \frac{(a_k - jb_k)}{2}\ \text{für } k > 0,\ c_k = a_0\right)$ **:**

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \qquad \text{mit} \qquad a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t)\, dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t)\cos(k\omega_0 t)\, dt \text{ und } b_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t)\sin(k\omega_0 t)\, dt$$

Mittlere Signalleistung :

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0| + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2,\ \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_{T} |x(t)|^2\, dt = \text{const.}$$

Abweichfehler : $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{jk\omega_0 t},\ N < \infty,\ \varepsilon_N = \int_{T_0} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t)|^2\, dt$

Zeitverschiebung $\Longleftrightarrow$ **Phasenverschiebung**

Periodische Faltung : $\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_1(t)\, \tilde{x}_2(t)\, dt$, **bei** $\{c_{1k}\}$ **und** $\{c_{2k}\}$ **FR – Koeff. von** $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$

und $y(t)$ **hat dann die FR – Koeffizienten** $c_{yk}(t) = T_0\, c_{1k}\, c_{2k}$

Zeitkontinuierliche FourierTransformation (FT)

Synthese : $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$, **Analyse :** $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)\, e^{-j\omega t}\, dt$

Zeigerdarstellung : $X(\omega) = |X(\omega)|\, e^{\pm j\psi(\omega)}$

$E_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$ **(Konvergiert nicht für peridische Systeme)**

$E_{\mu\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} x_\mu(t)\, x_\nu^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_\mu(\omega)\, X_\nu^*(\omega)\, d\omega$

Zusammenhang von FR und FT : $c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$

Eigenschaften einer zeitkontinuierlichen FT :

Symmetrie : $x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(-\omega)$

Linerität: $ax_1(t) + ax_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX_1(\omega) + aX_2(\omega)$

Zeitverschiebung: $x(t-\tau) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t} X(\omega)$

Frequenzverschiebung: $e^{j\omega_0 t} x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$

Maßstabsänderung: $x(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Differentation: $\frac{d^n}{dt^n} x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j\omega)^n X(\omega);$ $t^n x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j^n \frac{d^n}{dt^n} X(\omega)$

Integration: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega);$

$$-\frac{1}{jt} X(t) + \pi x(0)\,\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\omega} x(\Omega)\, d\Omega$$

Faltung: $x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) X_2(\omega)$

Modulation: $x_1(t)\, x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega);$ **Frequenzverschiebung**

$$x(t) \cos(\omega_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$$

Korrelation: $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t+\tau)\, d\tau \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(\omega) X_2^*(\omega)$

Wiener – Khintchine – Theorem:

Fourier – Transformierte der Energie – Autokorrelationsfunktion ist das

Energiedichtespektrum: $E_{\mu\mu} \frac{\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} d\, E_{\mu\mu}}{d\omega}$

Fourier – Transformierte der Leistungs – Autokorrelationsfunktion ist das

Leistungsdichtespektrum: $P_{\mu\mu} \frac{\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} d\, P_{\mu\mu}}{d\omega}$

Amplitudenmodulation: $y(t) =$

$x(t)\, x_0(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Allgemein: $y_n(t) = \prod_{\nu=0}^{n} x_\nu(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} y_n(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} X_0(\omega) * X_1(\omega) * \ldots * X_n(\omega)$

Impulsübertragung:

Impulsantwort: $h(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$

Umwandlung: $y(t) = x(t)\, h(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(\omega) = X(\omega) * H(\omega)$

Frequenzgang: $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$, **existiert nur,**

das wenn System stabil ist $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

Lineare DGLs:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \frac{d^m}{dt^m} y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(\omega) \sum_{m=0}^{N} a_m (j\omega)^m = X(\omega) \sum_{m=0}^{M} b_m (j\omega)^m$$

Somit : $H(\omega) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m (j\omega)^m}{\sum_{m=0}^{N} a_m (j\omega)^m}$

Klassifikation : 1. Ordnung : N, M $\leq$ 1; 2. Ordnung : N, M $\leq$ 2; n.Ordnung : Zusammensetzung

Zeitdiskrete Fourier – Transformation (ZDFT)

Synthese : $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$, **Analyse :** $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$

Stabilität : $|X(\Omega)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] < \infty$

Signalenergie : $E_X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$, $E_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) Y^*(\Omega) d\Omega$

Bode – Diagramme : $Y(\Omega) = H(\Omega) X(\Omega) \Rightarrow |Y(\Omega)| = |H(\Omega)| |X(\Omega)| \wedge$ **analog f. Phasenwinkel**

Eigenschaften einer zeitkontinuerlichen FT :

Symmetrie : $x[n] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$

Linerität : $ax_1[n] + ax_2[n] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} aX_1(\Omega) + aX_2(\Omega)$

Zeitverschiebung : $x[n - n_0] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t} X(\Omega)$

Frequenzverschiebung : $e^{j\Omega_0 n} x[n] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} X(\Omega - \Omega_0)$

Maßstabsänderung : $x[n/a] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} X(a\Omega)$ **bei** $n \bmod a = 0$

Differenz : $x[n] - x[n-1] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$

Superposition : $\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + 2\pi r)$

Differentation : $n^k x[n] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} j^k \frac{d^k}{d\Omega^k} X(\Omega)$

Faltung : $x_1[n] * x_2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega) X_2(\Omega)$

Modulation : $x_1[n] x_2[n] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\Omega') X_2(\Omega - \Omega') d\Omega'$

Korrelation : $\sum_{m=-\infty}^{n} x_1[n] x_2[n] \overset{ZDFT}{\longleftrightarrow} X_1^*(\Omega) X_2(\Omega)$

Zeitdiskrete Impulsübertragung :

Impulsantwort : $y[n] = x[n] * h[n]$

Umwandlung : $y[n] = x[n] * h[n] \overset{\text{ZDFT}}{\longleftrightarrow} Y(\Omega) = X(\Omega) * H(\Omega)$

Frequenzgang : $H(\Omega) = \dfrac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$, **existiert nur,**

das wenn System stabil ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

Lineare Differenzengleichungen :

$$\sum_{m=0}^{N} a_m\, y[n-m] = \sum_{m=0}^{M} b_m\, x[n-m] \;\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\; Y(\omega) \sum_{m=0}^{N} a_m\, e^{-j\Omega m} = X(\omega) \sum_{m=0}^{M} b_m\, e^{-j\Omega m}$$

Somit : $H(\omega) = \dfrac{\sum_{m=0}^{N} a_m\, e^{-j\Omega m}}{\sum_{m=0}^{M} b_m\, e^{-j\Omega m}}$

Klassifikation : 1. Ordnung : $n \le 1$; **2. Ordnung :** $n \le 2$; **n.Ordnung : Zusammensetzung**

Signalabtastung und Rückgewinnung

Impulsmodulator : $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S)$ **mit** $T_S = \dfrac{2\pi}{\omega_S}$, $S(\omega) = \dfrac{2\pi}{T_S} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - r\omega_S)$

Nyquest – Frequenz / Abtasttheorem : $\omega_S > 2\,\omega_g$

$X(\Omega) = X_S(\omega) = \dfrac{1}{T_S} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(\omega - r\omega_S)$

Abtastbedingung im Frequenzbereich : $T_p \ge 2\,T_g$

Durchführung mit Zeitfensterung : $x(t) = x_p(t)\, w(t)$, **mit** $w(t) = \begin{cases} \omega_p & \text{für } |t| \le \pi/\omega_p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Laplace – Transformation (LT)

Synthese : $x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\,e^{st}\,ds = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$, Analyse : $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{x(t)\}$

Unilateral : $x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j} X_+(s)\,e^{st}\,ds,\qquad X(s) = \int_0^{\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$

Bei der DGL $\sum_{m=0}^{N} a_m \frac{d^m}{dt^m} y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(\omega)\sum_{m=0}^{N} a_m s^m = X(\omega)\sum_{m=0}^{M} b_m s^m$

Somit : $H(\omega) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{m=0}^{N} a_m s^m}$

Eigenschaften der LT :

Linerität : $a x_1(t) + a x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} a X_1(s) + a X_2(s),\ R = R_1 \cap R_2$

Zeitverschiebung : $x(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} e^{-s t_0} X(s),\ R = R_1$

Frequenzverschiebung : $e^{-s_0 t} x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s-s_0),\ R = R_1 + \mathrm{Re}(s_0)$

Maßstabsänderung : $x(at) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right),\ R = R_1/a$

Differentation : $\frac{d^n}{dt^n} x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} s^n X(s);\qquad -t x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{d}{dt} X(s),\ R = R_1$

Integration : $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s} X(s),\quad R = R_1 \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$

Faltung : $x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X_1(s) X_2(s),\ R = R_1 \cap R_2$

Impulsübertragung : $y(t) = x(t) * h(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = X(s) H(s)$

z – Transformation

Laurent – Reihe : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit $a_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,ds$

Synthese : $x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\,z^{n-1}\,dz = Z^{-1}\{X(z)\}$

Analyse : $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,z^{-n} = Z\{x[n]\}$

Hinreichende Konvergenzbedingung : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]\,r^{-n}| < \infty$

Konvergenzbereich :

Scheibe $(0 \le R_1 < |z| < R_2 \le \infty)$, bei Konvergenz ist der Einheitskreis im Konvergenzbereich, fall $x[n]$ endlich, Konvergenzbereich = z – Ebene evtl. ohne $|z| = 0$, $|z| = \infty$. Konvergenzbereich immer zusammenhängend.

Unilateral : $x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_+(z)\,z^{n-1}\,dz,\ X_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\,z^{-n}$

Eigenschaften einer zeitdiskreten ZT :

Linerität: $$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z),\ \ R \supset R_1 \cap R_2$$

n – Verschiebung: $$x[n-n_0] \overset{ZT}{\leftrightarrow} z^{-n_0}X(z),\ \ R = R_1 \backslash \{z=0,\ z=-\infty\}\ (\text{evtl})$$

z – Verschiebung: $$z_0^n\, x[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right),\ \ R = |z_0|\, R_1$$

$$e^{j\Omega_0 n}\, x[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} X(e^{-j\Omega_0} z),\ \ R = R_1$$

Differentation nach z: $$n\, x[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} -z\frac{d}{dz}X(z),\ R = R_1 \backslash \{z=0,\ z=-\infty\}\ (\text{evtl})$$

Faltung: $$x_1[n] * x_2[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} X_1(z)\, X_2(z),\ \ R \supset R_1 \cap R_2$$

Modulation: $$x_1[n]\, x_2[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\oint_C X_1(\xi)\, X_2\left(\frac{z}{\xi}\right)\xi^{-1}\, d\xi,\ R \supset R_1 \cap R_2$$

Superposition: $$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{ZT}{\leftrightarrow} \frac{X(z)}{1-z^{-1}},\ R = R_1 \cap \{|z| > 1\}$$

Symmetrie: $$x^*[n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} X^*(z^*),\ \ R = R_1$$

$$x[-n] \overset{ZT}{\leftrightarrow} X(z^{-1}),\ \ R = R_x^{-1}$$

$$\text{Re}\{x[n]\} \overset{ZT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)],\ \ R \supset R_x$$

$$\text{Im}\{x[n]\} \overset{ZT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)],\ \ R \supset R_x$$

Anfangswert: $$\forall\, n < 0.\ x[n] = 0. \Longrightarrow X(0) = \lim_{z\to\infty} X(z),\ R = R_1$$

Parsevallsches Theorem:

$$E_{12} = Y(z)\,|_{z=1} = \sum_{m=-\infty}^{n} x_1[n]\, x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(\xi)\, X_2\left(\frac{1}{\xi}\right)\xi^{-1}\, dz$$

$$E_X = \sum_{m=-\infty}^{n} x^2[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(\xi)\, X_2\left(\frac{1}{\xi}\right)\xi^{-1}\, dz$$

Diskrete Fourier – Reihe (DFR)

Vorbedingung : N – Periodizität $x[n] = x[n+N]$.

Synthese : $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, W_N^{-kn}$

Analyse : $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn}$ mit $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Parsevallsches Theorem : $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$

Periodische Impulsfolge : $x[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n+rN] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \pm N, \pm 2N \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Eigenschaften einer DFR :

Linerität : $a x_1[n] + b x_2[n] \overset{DFR}{\longleftrightarrow} a X_1[k] + b X_2[k]$

Verschiebung : $x[n-m] \overset{DFR}{\longleftrightarrow} e^{-j\frac{2\pi km}{N}} X[k] = W_N^{km} X[k]$

$e^{j\frac{2\pi nm}{N}} x[n] = W_N^{-nm} x[n] \overset{DFR}{\longleftrightarrow} X[k-m]$

Periodische Faltung : $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[n]\, x_2[n-m] \overset{DFR}{\longleftrightarrow} X_1[k]\, X_2[k]$

Period. Modulation : $x_1[n]\, x_2[n] \overset{DFR}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_1[k]\, X_2[k-m]$

Symmetrie : $x^*[n] \overset{DFR}{\longleftrightarrow} X^*[-k]$

$x^*[-n] \overset{DFR}{\longleftrightarrow} X^*[k]$

Falls $x[n]$ reell : $X[k] = X^*[-k]$, $|X[k]| = |X[-k]|$

Zusammenhang DFR und ZDFT : Bei $x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & \text{für } 0 \le n < N \text{ bei } N-\text{periodizität} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

gilt : $\tilde{X}[k] = X(\Omega)\,|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$

Diskrete Fourier – Transformation (DFT)

Definition DFT : DFR mit

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & \text{für } 0 \le n < N \text{ bei } N-\text{periodizität} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k] & \text{für } 0 \le k < N \text{ bei } N-\text{periodizität} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Vektordarstellung : $\underline{X} = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{x}$

(Signalvektor = Transformationsmatrix · Signalvektor)

Parsevallsches Theorem : $E_X = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$

Eigenschaften einer DFR :

Linerität : $a x_1[n] + b x_2[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} a X_1[k] + b X_2[k]$

Zirk.Verschiebung : $x[(n-m) \bmod N] \overset{DFT}{\leftrightarrow} e^{-j\frac{2\pi km}{N}} X[k] = W_N^{km} X[k]$

$$e^{j\frac{2\pi nm}{N}} x[n] = W_N^{-nm} x[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[(n-m) \bmod N]$$

Zirkuläre Faltung : $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[n]\, x_2[(n-m) \bmod N] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X_1[k]\, X_2[k]$

Zirkuläre Modulation : $x_1[n]\, x_2[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1[k]\, X_2[(k-m) \bmod N]$

Symmetrie : $x^*[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X^*[-k \bmod N]$

$$x^*[-n \bmod N] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X^*[k]$$

Falls x[n] reell : $\begin{matrix} X[k] = X^*[-k \bmod N] \\ |X[k]| = |X[-k \bmod N]| \end{matrix}$

Stochastische Signale

Wahrscheinlichkeitsdichte : $p(x) = \frac{dP(x)}{dx}$,

Wahrscheinlichkeitsverteilung : $P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)\, d\xi \le 1$

Schaarmittel :

Mittelwert über dem vollständigen Satz der Repräsentanten des Prozesses zu einem festen Zeitpunkt.

Zeitmittel : Mittelwert über die Zeit an einem Repräsentanten des Prozesses.

Ergodische Prozesse : Schaarmittel = Zeitmittel

Für ergodische Prozesse :

Schaarmittel : $\varepsilon\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\, dx, \quad \varepsilon\{x^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot p(x)\, dx$

$$\textbf{Zeitmittel}: \; < x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt, \quad < x^k(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^k(t)\,dt$$

Zentrale Momente : $< |x(t) - < x(t) > |^k >$ **bzw.** $< |x[n] - < x[n] > |^k >$

Dispersion σ_x^2 **: Zentrales Moment zweiter Ordnung (k = 2).**

Kreuzkorrelationsfunktion :

$$\varphi_{xy}(\tau) = < x(t)\, y(t+\tau) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, y(t+\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, p(x, y)\,dx\,dy$$

$$\varphi_{xy}[m] = < x[n]\, y[n+m] >= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{N=0}^{N-1} x[n]\, y[n+m]\,dt = \sum_k \sum_l x_k\, y_l\, p_{kl}$$

Autokorrelationsfunktion :

$$\varphi_{xy}(\tau) = < x(t)\, x(t+\tau) > \text{ bzw. } \varphi_{xy}[m] = < x[n]\, y[n+m] >$$

Insbesondere : $\varphi_{xy}(0) =$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\,dt = < x^2(t) > \text{ (analog für diskretes).}$$

Kreuzkovarianzfunktion :

$$\gamma_{xy}(\tau) = < (x(t) - < x(t) >)\,(y(t+\tau) - < y(t+\tau) >)$$
$$= \varphi_{xy}(\tau) - < x(t)\, y(t) >$$

(analog im diskreten Fall)

Autokovarianzfunktion :

$$\gamma_{xx}(\tau) = < (x(t) - < x(t) >)\,(x(t+\tau) - < x(t+\tau) >)$$
$$= \varphi_{xx}(\tau) - <$$
$$x(t) >^2$$

(analog im diskreten Fall)

$$\gamma_{xx}(0) = < (x(t) - < x(t) >)^2 >= \varphi_{xx}(0) - < x(t) >^2 = \sigma_x^2$$

Bei stochastischen Signalen, deren Mittelwert Null ist, sind Kovarianz – und Korrelationsfunktionen identisch.

Kreuz – Leistungsdichtespektren :

$$\phi_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau)\, e^{-j\omega t}\, d\tau = H(\omega)\, \phi_{xx}(\omega)$$

$$\phi_{xy}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m]\, e^{-j\Omega m}\, d\tau = H(\Omega)\, \phi_{xx}(\Omega)$$

$$\phi_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2\, \phi_{xx}(\omega)$$

$$\phi_{yy}(\Omega) = |H(\Omega)|^2\, \phi_{xx}(\Omega)$$